

MATERIAŁY DYDAKTYCZNE

do dodatkowych zajęć wyrównawczych z przedmiotu

Matematyka dla informatyków

dla studentów kierunku/kierunków

Informatyka

Opracował zespół w składzie:

Adam Gregosiewicz

Artur Kukuryka

Ernest Nieznaj

Elżbieta Ratajczyk

Lublin 2025 r.

Obliczanie pochodnych funkcji

Przykład 1. Korzystając z definicji, obliczyć pochodne funkcji

$$\text{a) } f(x) = x^2 \quad \text{b) } g(x) = x^3 \quad \text{c) } h(x) = \frac{1}{x} \quad \text{d) } k(x) = \frac{1}{x^2}.$$

Rozwiązanie: a) Przypomnijmy, że jeśli $f(x)$ jest funkcją określoną w przedziale (a, b) , to jej pochodna w punkcie $x_0 \in (a, b)$ zdefiniowana jest następująco

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Jeśli powyższa granica istnieje i jest skończona, to mówi się, że f jest różniczkowalna w punkcie x_0 . Niech $x_0 \in \mathbb{R}$ będzie ustalony. Wówczas

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = (x_0 + h)^2 - x_0^2 = x_0^2 + 2x_0h + h^2 - x_0^2 = 2x_0h + h^2.$$

Zatem

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2x_0h + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x_0 + h) = 2x_0.$$

b) Wykorzystując wzór $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, dostajemy równość

$$(x_0 + h)^3 - x_0^3 = x_0^3 + 3x_0^2h + 3x_0h^2 + h^3 - x_0^3 = 3x_0^2h + 3x_0h^2 + h^3.$$

W rezultacie

$$g'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x_0^2h + 3x_0h^2 + h^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (3x_0^2 + 3x_0h + h^2) = 3x_0^2.$$

c) Niech $x_0 \neq 0$. Wówczas

$$\frac{1}{x_0 + h} - \frac{1}{x_0} = \frac{x_0 - (x_0 + h)}{(x_0 + h)x_0} = \frac{-h}{x_0^2 + x_0h}.$$

Stąd

$$h'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{h(x_0^2 + x_0h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{x_0^2 + x_0h} = -\frac{1}{x_0^2}.$$

d) Dla $x_0 \neq 0$ mamy

$$\frac{1}{(x_0 + h)^2} - \frac{1}{x_0^2} = \frac{x_0^2 - (x_0 + h)^2}{x_0^2(x_0 + h)^2} = \frac{-h(2x_0 + h)}{x_0^2(x_0 + h)^2}$$

i stąd

$$k'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(2x_0 + h)}{x_0^2(x_0 + h)^2} = -\frac{2x_0}{x_0^4} = -\frac{2}{x_0^3}.$$

Podsumowując punkty a), b), c) i d), możemy napisać

$$(x^2)' = 2x, \quad (x^3)' = 3x^2, \quad \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}, \quad \left(\frac{1}{x^2}\right)' = -\frac{2}{x^3}.$$

Przykład 2. Korzystając z definicji, obliczyć pochodne funkcji

$$\text{a) } f(x) = \sqrt{x} \quad \text{b) } g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \text{c) } h(x) = \sqrt[3]{x}.$$

Rozwiązanie: a) Niech $x_0 > 0$. Z równości $(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = a - b$, gdzie a i b są nieujemne, otrzymujemy

$$(\sqrt{x_0 + h} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0}) = x_0 + h - x_0 = h,$$

i następnie

$$\sqrt{x_0 + h} - \sqrt{x_0} = \frac{(\sqrt{x_0 + h} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0})}{\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0}} = \frac{h}{\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0}}.$$

Dzieląc powyższy przyrost przez h dostajemy wzór na pochodną

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}.$$

b) Ustalmy $x_0 > 0$. Wówczas

$$\frac{1}{\sqrt{x_0 + h}} - \frac{1}{\sqrt{x_0}} = \frac{\sqrt{x_0} - \sqrt{x_0 + h}}{\sqrt{x_0}\sqrt{x_0 + h}}.$$

Mnożąc i dzieląc prawą stronę przez $\sqrt{x_0} + \sqrt{x_0 + h}$ otrzymujemy

$$\frac{\sqrt{x_0} - \sqrt{x_0 + h}}{\sqrt{x_0}\sqrt{x_0 + h}} \cdot \frac{\sqrt{x_0} + \sqrt{x_0 + h}}{\sqrt{x_0} + \sqrt{x_0 + h}} = \frac{-h}{\sqrt{x_0}\sqrt{x_0 + h}(\sqrt{x_0} + \sqrt{x_0 + h})}.$$

Zatem

$$g'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{\sqrt{x_0}\sqrt{x_0 + h}(\sqrt{x_0} + \sqrt{x_0 + h})} = -\frac{1}{2x_0\sqrt{x_0}}.$$

c) Wykorzystamy tutaj wzór $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$, który można zapisać w postaci

$$a - b = (\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}),$$

przyjmując w wyjściowym wzorze $a \rightarrow \sqrt[3]{a}$ oraz $b \rightarrow \sqrt[3]{b}$. Jeśli $a \neq 0$ lub $b \neq 0$, to równoważnie zachodzi równość

$$\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b} = \frac{a - b}{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}}.$$

Jeśli więc $x_0 \neq 0$, to z powyższego wzoru otrzymujemy

$$\sqrt[3]{x_0 + h} - \sqrt[3]{x_0} = \frac{h}{\sqrt[3]{(x_0 + h)^2} + \sqrt[3]{(x_0 + h)x_0} + \sqrt[3]{x_0^2}},$$

i stąd

$$h'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{(x_0 + h)^2} + \sqrt[3]{(x_0 + h)x_0} + \sqrt[3]{x_0^2}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x_0^2}}.$$

Przykład 3. Korzystając z definicji, obliczyć pochodne funkcji

$$\text{a) } f(x) = \ln x \quad \text{b) } g(x) = e^x.$$

Rozwiązanie: a) Niech $x_0 > 0$. Wówczas, z własności logarytmu $\ln a - \ln b = \ln\left(\frac{a}{b}\right)$, dla $a, b > 0$, mamy

$$\ln(x_0 + h) - \ln x_0 = \ln \frac{x_0 + h}{x_0} = \ln \left(1 + \frac{h}{x_0}\right).$$

Iloraz różnicowy zapisujemy w następujący sposób

$$\frac{\ln(x_0 + h) - \ln x_0}{h} = \frac{\ln\left(1 + \frac{h}{x_0}\right)}{h} = \frac{1}{x_0} \cdot \frac{\ln\left(1 + \frac{h}{x_0}\right)}{\frac{h}{x_0}}$$

Następnie wykorzystamy poniższy fakt z teorii granic

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1, \tag{1}$$

z którego wynika równość

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{h}{x_0}\right)}{\frac{h}{x_0}} = 1.$$

Na tej podstawie uzyskujemy wzór na pochodną logarytmu

$$h'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{x_0} \cdot \frac{\ln\left(1 + \frac{h}{x_0}\right)}{\frac{h}{x_0}} = \frac{1}{x_0}.$$

b) Udowodnimy najpierw pomocniczą równość

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1. \quad (2)$$

Mianowicie, podstawmy $t = e^h - 1$. Wówczas $h = \ln(t + 1)$ oraz $t \rightarrow 0$, gdy $h \rightarrow 0$. Na podstawie (1) mamy

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\ln(t + 1)} = 1.$$

Z równości (2) wynika więc, że

$$g'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x_0+h} - e^{x_0}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x_0}(e^h - 1)}{h} = e^{x_0}.$$

Innymi słowy, $(e^x)' = e^x$, czyli pochodna równa jest wyjściowej funkcji.

Przykład 4. Obliczyć pochodne funkcji

$$\text{a) } f(x) = \log_a x \quad \text{b) } g(x) = a^x.$$

Rozwiązanie: a) Zakładamy, że $a > 0$ i $a \neq 1$. Z poprzedniego zadania wiadomo, że $(\ln x)' = \frac{1}{x}$. Ponadto, $(cf(x))' = cf'(x)$, gdzie $c \in \mathbb{R}$. Zatem

$$(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a} \right)' = \frac{1}{\ln a} \cdot (\ln x)' = \frac{1}{x \ln a}.$$

b) W poprzednim zadaniu pokazaliśmy, że $(e^x)' = e^x$. Ponieważ $a^x = e^{x \ln a}$, więc korzystając ze wzoru na pochodną funkcji złożonej oraz $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ dostajemy

$$(a^x)' = [(e^x)^{\ln a}]' = (\ln a)(e^x)^{\ln a - 1} \cdot e^x = (\ln a)(e^x)^{\ln a} = a^x \ln a.$$

W szczególności, jeśli $a = e$, to $(e^x)' = e^x \ln e = e^x$.

Przykład 5. Korzystając z definicji, obliczyć pochodne funkcji

$$\text{a) } f(x) = \sin x \quad \text{b) } g(x) = \cos x.$$

Rozwiązanie: a) Pokażemy, że $(\sin x)' = \cos x$ i $(\cos x)' = -\sin x$. W pierwszym przypadku wykorzystamy wzór na różnicę sinusów

$$\sin a - \sin b = 2 \sin \frac{a-b}{2} \cos \frac{a+b}{2}, \quad a, b \in \mathbb{R},$$

z którego otrzymujemy

$$\sin(x_0 + h) - \sin x_0 = 2 \sin \frac{h}{2} \cos(x_0 + \frac{h}{2}).$$

Następnie, iloraz różnicowy zapisujemy w postaci

$$\frac{\sin(x_0 + h) - \sin x_0}{h} = \frac{2 \sin \frac{h}{2} \cos(x_0 + \frac{h}{2})}{h} = \frac{\sin \frac{h}{2} \cos(x_0 + \frac{h}{2})}{\frac{h}{2}}.$$

Z teorii granic wiadomo, że

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \quad (3)$$

Wynika stąd, przez podstawienie $x \rightarrow \frac{h}{2}$, równość

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = 1.$$

Zatem

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{h}{2} \cos(x_0 + \frac{h}{2})}{\frac{h}{2}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \cos(x_0 + \frac{h}{2}) = \cos x_0.$$

b) Podobnie jak w punkcie a), wykorzystamy wzór na różnicę kosinusów

$$\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a-b}{2} \sin \frac{a+b}{2}, \quad a, b \in \mathbb{R},$$

z którego wynika

$$\cos(x_0 + h) - \cos x_0 = -2 \sin \frac{h}{2} \sin(x_0 + \frac{h}{2}),$$

oraz

$$\frac{\cos(x_0 + h) - \cos x_0}{h} = \frac{-2 \sin \frac{h}{2} \sin(x_0 + \frac{h}{2})}{h} = \frac{-\sin \frac{h}{2} \sin(x_0 + \frac{h}{2})}{\frac{h}{2}}.$$

Korzystając jeszcze raz z (3) otrzymujemy

$$g'(x) = -\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \sin(x_0 + \frac{h}{2}) = -\sin x_0.$$

Przykład 6. Obliczyć pochodne funkcji $\operatorname{tg} x$ i $\operatorname{ctg} x$.

Rozwiązanie: Zgodnie z definicją, $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, zatem z ogólnego wzoru na pochodną ilorazu dwóch funkcji

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

otrzymujemy

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Podobnie jest z kotangensem

$$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right)' = \frac{(\cos x)' \sin x - \cos x (\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Przykład 7. Obliczyć pochodne funkcji

$$\text{a) } f(x) = (3x + 1)^6 \quad \text{b) } g(x) = \sin(x^3) \quad \text{c) } h(x) = \ln \frac{1}{(1 - 3x)^2}$$

Rozwiązanie: Wszystkie funkcje w tym zadaniu są funkcjami złożonymi. Aby obliczyć ich pochodne posługujemy się wzorem na pochodną funkcji złożonej, tzn. $(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$, gdzie f jest funkcją zewnętrzną, a g funkcją wewnętrzną.

a) Funkcja f jest złożeniem x^6 oraz $3x + 1$. Ponieważ $(x^6)' = 6x^5$, to

$$f'(x) = 6(3x + 1)^5 \cdot (3x + 1)' = 18(3x + 1)^5.$$

b) Funkcja g jest złożeniem $\sin x$ i x^3 , zatem

$$(\sin(x^3))' = \cos(x^3) \cdot (x^3)' = 3x^2 \cos(x^3).$$

c) Z własności logarytmu otrzymujemy

$$\ln \frac{1}{(1 - 3x)^2} = \ln(1 - 3x)^{-2} = -2 \ln(1 - 3x).$$

Rozważana funkcja jest więc złożeniem $\ln x$ i $1 - 3x$. Pochodna $\ln x$ równa jest $\frac{1}{x}$, zatem

$$h'(x) = -2(\ln(1 - 3x))' = -2 \cdot \frac{1}{1 - 3x} \cdot (1 - 3x)' = \frac{6}{1 - 3x}.$$

Przykład 8. Obliczyć pochodne funkcji

$$\text{a) } f(x) = (x^3 - 1)e^{-2x} \quad \text{b) } g(x) = xe^{-x} \sin x \quad \text{c) } h(x) = \frac{2^{\sin x}}{3^{\cos x}}.$$

Rozwiązanie: a) Korzystamy ze wzoru na pochodną iloczynu dwóch funkcji

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Przyjmując $f(x) = x^3 - 1$ oraz $g(x) = e^{-2x}$ mamy

$$\begin{aligned} ((x^3 - 1)e^{-2x})' &= (x^3 - 1)'e^{-2x} + (x^3 - 1)(e^{-2x})' \\ &= 3x^2e^{-2x} + (x^3 - 1)(-2e^{-2x}) = (-2x^3 + 3x^2 + 2)e^{-2x}. \end{aligned}$$

b) Podobnie jak w punkcie a), korzystamy ze wzoru na pochodną iloczynu. Ponieważ tym razem g jest iloczynem trzech funkcji, to iloczyn pierwszych dwóch trzeba potraktować jak jedną funkcję, tzn.

$$g'(x) = (xe^{-x} \sin x)' = (xe^{-x})' \sin x + xe^{-x}(\sin x)'$$

Następnie, obliczamy pochodną xe^{-x}

$$(xe^{-x})' = (x)'e^{-x} + x(e^{-x})' = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1 - x).$$

Zatem

$$g'(x) = e^{-x}(1 - x) \sin x + xe^{-x} \cos x = e^{-x}((1 - x) \sin x + x \cos x).$$

c) Funkcję h zapisujemy w postaci $2^{\sin x} \cdot 3^{-\cos x}$, zatem

$$h'(x) = (2^{\sin x} \cdot 3^{-\cos x})' = (2^{\sin x})' \cdot 3^{-\cos x} + 2^{\sin x} \cdot (3^{-\cos x})'.$$

Ze wzoru $(a^x)' = a^x \ln a$, dla $a > 0$, mamy

$$(2^{\sin x})' = 2^{\sin x} \ln 2 \cdot (\sin x)' = 2^{\sin x} \ln 2 \cdot \cos x$$

oraz

$$(3^{-\cos x})' = 3^{-\cos x} \ln 3 \cdot (-\cos x)' = 3^{-\cos x} \ln 3 \cdot \sin x.$$

Ostatecznie

$$h'(x) = 2^{\sin x} 3^{-\cos x} (\ln 2 \cdot \cos x + \ln 3 \cdot \sin x).$$

Przykład 9. Obliczyć pochodne funkcji

$$\text{a) } f(x) = x^{2x+1} \quad \text{b) } g(x) = \log_{2x+1} x.$$

Rozwiązanie: a) Zauważmy, że nie możemy wykorzystać tutaj bezpośrednio wzorów $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, $(a^x)' = a^x \ln a$, ponieważ w tych wzorach α i a są stałymi. Używając przekształceń

$$a^b = c^{\log_c a^b} = c^{b \log_c a} \quad a > 0, \quad c > 0,$$

zapisujemy daną funkcję w postaci wykładniczej

$$f(x) = x^{2x+1} = e^{(2x+1) \ln x}.$$

Wynika stąd, że f jest złożeniem funkcji e^x i $(2x+1) \ln x$. Zatem

$$f'(x) = (e^{(2x+1) \ln x})' = e^{(2x+1) \ln x} ((2x+1) \ln x)' = e^{(2x+1) \ln x} (2 \ln x + 2 + \frac{1}{x}).$$

b) Podobnie jak w punkcie a), nie możemy wykorzystać bezpośrednio wzoru na pochodną logarytmu, tzn. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$, ponieważ a jest tutaj stałą. Przekształcimy g za pomocą

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}, \quad c > 0, \quad c \neq 1.$$

Wówczas, przyjmując $c = e$, mamy

$$g(x) = \log_{2x+1} x = \frac{\ln x}{\ln(2x+1)},$$

a więc g jest ilorazem dwóch funkcji. Zatem

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{(\ln x)' \ln(2x+1) - \ln x (\ln(2x+1))'}{\ln^2(2x+1)} = \frac{\frac{\ln(2x+1)}{x} - \frac{\ln x}{2x+1}}{\ln^2(2x+1)} \\ &= \frac{(2x+1) \ln(2x+1) - x \ln x}{x(2x+1) \ln^2(2x+1)}. \end{aligned}$$

Przykład 10. Korzystając z twierdzenia o pochodnej funkcji odwrotnej obliczyć pochodne funkcji

$$\text{a) } f(x) = \sqrt{x} \quad \text{b) } g(x) = \sqrt[3]{x} \quad \text{c) } h(x) = \ln x.$$

Rozwiązanie: Przypomnijmy, że jeśli $y = f(x)$ jest funkcją odwracalną, w otoczeniu punktu x_0 , i jej funkcja odwrotna $x = f^{-1}(y)$ ma pochodną różną od zera, w punkcie $y_0 = f(x_0)$, to wówczas f jest także różniczkowalna w punkcie x_0 , oraz

$$f'(x_0) = \frac{1}{(f^{-1}(y_0))'}.$$

Powyższy wzór należy rozumieć następująco. Obliczamy pochodną f^{-1} , względem zmiennej y . Pochodna ta zależy więc od y . Następnie, trzeba ją wyrazić jako funkcję zmiennej x , przy użyciu podstawienia $y = f(x)$.

a) Niech $x \in (0, +\infty)$. Funkcja \sqrt{x} jest ściśle rosnąca, a więc różnowartościowa i w związku z tym odwracalna oraz

$$y = \sqrt{x} \quad \Leftrightarrow \quad x = y^2.$$

Pochodna y^2 , względem y , wynosi $2y$, stąd

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{(y^2)'} = \frac{1}{2y} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad x \in (0, +\infty).$$

b) Zauważmy, że dziedziną naturalną $\sqrt[3]{x}$ jest \mathbb{R} . Jest to funkcja różnowartościowa i odwracalna oraz

$$y = \sqrt[3]{x} \Leftrightarrow x = y^3.$$

Ponieważ $(y^3)' = 3y^2$, więc

$$(\sqrt[3]{x})' = \frac{1}{(y^3)'} = \frac{1}{3y^2} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, \quad x \neq 0.$$

c) Dziedzina naturalną funkcji logarytmicznej jest przedział $(0, +\infty)$. Funkcja ta jest ściśle rosnąca, a więc odwracalna oraz

$$y = \ln x \Leftrightarrow x = e^y.$$

Ponieważ $(e^y)' = e^y$, więc

$$(\ln x)' = \frac{1}{(e^y)'} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}.$$

Zwróćmy uwagę na to, że $(\ln ax)' = \frac{1}{x}$, dla dowolnego $a > 0$. Wynika to z faktu, że $\ln ax$ równa się $\ln x + \ln a$. Innymi słowy, $\ln x$ i $\ln ax$ różnią się o stałą.

Przykład 11. Korzystając z twierdzenia o pochodnej funkcji odwrotnej obliczyć pochodne funkcji

a) $f(x) = \arcsin x$ b) $g(x) = \arccos x$.

Rozwiązanie: a) Przypomnijmy, że $\arcsin x$ jest funkcją odwrotną do funkcji sinus w przedziale $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$, tzn. $f : \langle -1, 1 \rangle \rightarrow \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$. Wówczas

$$y = \arcsin x \Leftrightarrow x = \sin y, \quad x \in \langle -1, 1 \rangle.$$

Ponieważ $(\sin y)' = \cos y$, więc

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos y}.$$

Pozostaje wyrazić $\cos y$ za pomocą x . Wykorzystamy fakt, że w przedziale $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ kosinus jest dodatni. Oznacza to, że

$$\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}, \quad x \in (-1, 1).$$

Zatem

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad x \in (-1, 1).$$

b) Funkcja $g : \langle -1, 1 \rangle \rightarrow \langle 0, \pi \rangle$ jest funkcją odwrotną do kosinusa, na przedziale $\langle 0, \pi \rangle$, oraz

$$y = \arccos x \Leftrightarrow x = \cos y, \quad x \in \langle -1, 1 \rangle.$$

Wynika stąd, że

$$(\arccos x)' = \frac{1}{(\cos y)'} = -\frac{1}{\sin y}.$$

Ponadto, w przedziale $\langle 0, \pi \rangle$ sinus jest nieujemny, zatem

$$\sin y = \sqrt{1 - \cos^2 y} = \sqrt{1 - x^2}, \quad x \in (-1, 1).$$

W rezultacie mamy

$$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1, 1).$$

Otrzymaliśmy ciekawy wynik. Jeśli oznaczymy

$$h(x) = \arcsin x + \arccos x,$$

to $h'(x) = 0$. Wynika stąd, że h jest funkcją stałą, czyli $h(x) = C$. W szczególności, $h(x) = h(0)$ oraz $h(0) = \frac{\pi}{2}$. Tym samym wykazaliśmy, że

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \quad x \in \langle -1, 1 \rangle.$$

Przykład 12. Korzystając z twierdzenia o pochodnej funkcji odwrotnej obliczyć pochodne funkcji

$$\text{a) } f(x) = \arctg x \quad \text{b) } g(x) = \operatorname{arccot} x.$$

Rozwiązanie: a) Zgodnie z definicją, funkcja arkus tangens to funkcja odwrotna do tangensa w przedziale $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, tzn.

$$y = \arctg x \Leftrightarrow x = \operatorname{tg} y, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ponieważ $(\operatorname{tg} y)' = \frac{1}{\cos^2 y}$, to

$$(\arctg x)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \cos^2 y.$$

Następnie, obliczamy $\cos^2 y$

$$x = \operatorname{tg} y = \frac{\sin y}{\cos y} \Rightarrow x^2 = \frac{\sin^2 y}{\cos^2 y} = \frac{1 - \cos^2 y}{\cos^2 y} \Rightarrow \cos^2 y = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Zatem

$$(\operatorname{arc\,tg} x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

b) Funkcja $\operatorname{arc\,ctg} x$ jest funkcją odwrotną do kotangensa w przedziale $(0, \pi)$. Wówczas

$$y = \operatorname{arc\,ctg} x \Leftrightarrow x = \operatorname{ctg} y, \quad x \in \mathbb{R},$$

i stąd otrzymujemy

$$(\operatorname{arc\,ctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{ctg} y)'} = -\sin^2 y.$$

Podobnie jak w punkcie a), obliczamy $\sin^2 y$

$$x = \operatorname{ctg} y = \frac{\cos y}{\sin y} \Rightarrow x^2 = \frac{\cos^2 y}{\sin^2 y} = \frac{1 - \sin^2 y}{\sin^2 y} \Rightarrow \sin^2 y = \frac{1}{1+x^2}.$$

Ostatecznie

$$(\operatorname{arc\,ctg} x)' = \frac{-1}{1+x^2}.$$

Otrzymaliśmy wynik podobny do tego z poprzedniego zadania. Jeśli oznaczymy

$$h(x) = \operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,ctg} x,$$

to $h'(x) = 0$. Zatem h jest funkcją stałą, czyli $h(x) = C$. W szczególności, $h(x) = h(0)$ oraz $h(0) = \frac{\pi}{2}$. Innymi słowy, udowodniliśmy równość

$$\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,ctg} x = \frac{\pi}{2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Przykład 13. Znaleźć wzory ogólne na pochodną rzędu n następujących funkcji

$$\text{a) } f(x) = 3^{-x} \quad \text{b) } g(x) = xe^x \quad \text{c) } h(x) = \ln x.$$

Rozwiązanie: a) Ponieważ $(3^{-x})' = -3^{-x} \ln 3$, więc pierwsze trzy pochodne są równe

$$f'(x) = -3^{-x} \ln 3, \quad f''(x) = 3^{-x} (\ln 3)^2, \quad f'''(x) = -3^{-x} (\ln 3)^3.$$

Wykażemy indukcyjnie, że

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot 3^{-x} (\ln 3)^n, \quad n \geq 1.$$

Zakładając prawdziwość wzoru dla ustalonego $n \geq 1$, obliczamy $f^{(n+1)}(x)$

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= (f^{(n)}(x))' = ((-1)^n \cdot 3^{-x} (\ln 3)^n)' = (-1)^n \cdot 3^{-x} (\ln 3)^n \cdot (-\ln 3) \\ &= (-1)^{n+1} \cdot 3^{-x} (\ln 3)^{n+1}. \end{aligned}$$

Równość ta kończy dowód ogólnego wzoru na $f^{(n)}(x)$.

b) Pierwsza pochodna funkcji g równa jest

$$g'(x) = (xe^x)' = (x)'e^x + x(e^x)' = e^x + xe^x = (x+1)e^x.$$

Podobnie obliczamy drugą

$$g''(x) = ((x+1)e^x)' = (x+1)'e^x + (x+1)(e^x)' = (x+2)e^x.$$

Pokażemy, że

$$g^{(n)}(x) = (x+n)e^x, \quad n \geq 1.$$

Dla dowodu założmy, że powyższy wzór jest prawdziwy dla ustalonego $n \geq 1$. Wówczas, kolejna pochodna g równa jest

$$g^{(n+1)}(x) = ((x+n)e^x)' = (x+n)'e^x + (x+n)e^x = (x+n+1)e^x.$$

Krok indukcyjny został tym samym dowiedziony.

c) Ponieważ $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, więc

$$h'(x) = x^{-1}, \quad h''(x) = -1 \cdot x^{-2}, \quad h'''(x) = (-1)(-2)x^{-3}.$$

Wzór na pochodną rzędu n miałby więc postać

$$h^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \cdot (n-1)! \cdot x^{-n}, \quad n \geq 1.$$

Dla $n = 1$ używamy konwencji, że $0! = 1$. Podobnie jak w punktach a) i b) udowodnimy, że wzór ten jest poprawny za pomocą indukcji matematycznej. W tym celu obliczamy pochodną rzędu $n + 1$ funkcji h

$$\begin{aligned} h^{(n+1)}(x) &= ((-1)^{n-1} \cdot (n-1)! x^{-n})' = (-1)^{n-1} \cdot (n-1)! \cdot (-n) \cdot x^{-n-1} \\ &= (-1)^n \cdot n! \cdot x^{-(n+1)}. \end{aligned}$$

Wynika stąd, że wzór na $h^{(n)}(x)$ jest poprawny dla każdego $n \geq 1$.

Przykład 14. Obliczyć pochodną rzędu n , w punkcie $x = 0$, funkcji $\sin x$ i $\cos x$.

Rozwiązanie: Pierwsze cztery pochodne $\sin x$ równe są

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (\sin x)'' = -\sin x, \quad (\sin x)''' = -\cos x, \quad (\sin x)^{(iv)} = \sin x,$$

a więc kolejne pochodne powtarzają się cyklicznie. Pokażemy, że pochodną rzędu n można zapisać następująco

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right), \quad n \geq 0,$$

gdzie $(\sin x)^{(0)}$ oznacza $\sin x$. Aby to udowodnić, trzeba wykazać, że

$$(\sin x)^{(n)} = \begin{cases} \cos x, & n = 4k + 1, \\ -\sin x, & n = 4k + 2, \\ -\cos x, & n = 4k + 3, \\ \sin x, & n = 4k, \end{cases}$$

dla każdego całkowitego $k \geq 0$. Ponieważ sinus jest funkcją okresową, o okresie podstawowym równym 2π , tzn. $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$, dla każdego $x \in \mathbb{R}$, to ze wzorów redukcyjnych otrzymujemy

$$\sin(x + (4k + 1)\frac{\pi}{2}) = \sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x,$$

$$\sin(x + (4k + 2)\frac{\pi}{2}) = \sin(x + \pi) = -\sin x,$$

$$\sin(x + (4k + 3)\frac{\pi}{2}) = \sin(x + \frac{3\pi}{2}) = -\cos x,$$

$$\sin(x + 4k \cdot \frac{\pi}{2}) = \sin(x + 2\pi) = \sin x,$$

co było do wykazania. Zauważmy teraz, że ponieważ $\sin(k\pi) = 0$, dla każdego $k \in \mathbb{Z}$, to n -tą pochodną tej funkcji, w punkcie $x = 0$, możemy zapisać następująco

$$(\sin x)_{x=0}^{(n)} = \sin(n \cdot \frac{\pi}{2}) = \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ (-1)^k, & n = 2k + 1. \end{cases}$$

Podobnie jest z funkcją $\cos x$, dla której

$$(\cos x)' = -\sin x, \quad (\cos x)'' = -\cos x, \quad (\cos x)''' = \sin x, \quad (\cos x)^{iv} = \cos x.$$

Podobnie jak dla $\sin x$, można wykazać, że zachodzi równość

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right), \quad n \geq 0,$$

gdzie zerowa pochodna oznacza, tak jak wcześniej, wyjściową funkcję. Ponadto, ponieważ $\cos(k\pi + \frac{\pi}{2}) = 0$, dla każdego $k \in \mathbb{Z}$, to

$$(\cos x)_{x=0}^{(n)} = \cos\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0, & n = 2k + 1, \\ (-1)^k, & n = 2k. \end{cases}$$

Przykład 15. Znaleźć wzory ogólne na pochodną rzędu n funkcji $\sin^2 x$ i $\cos^2 x$.

Rozwiązanie: Z tożsamości trygonometrycznych

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x,$$

otrzymujemy wzory

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x, \quad \cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x.$$

Pozostaje obliczyć pochodną rzędu n funkcji $\cos 2x$. Na podstawie poprzedniego zadania wnioskujemy, że

$$(\cos 2x)^{(n)} = 2^n \cos\left(2x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right), \quad n \geq 0.$$

Powyższą równość udowodnimy niezależnie, za pomocą indukcji. Załóżmy więc, że jest ona prawdziwa dla ustalonego $n \geq 1$. Obliczamy pochodną rzędu $n + 1$ bezpośrednio, tzn. jako pochodną funkcji złożonej

$$(\cos 2x)^{(n+1)} = (2^n \cos(2x + n \cdot \frac{\pi}{2}))' = 2^n \cdot (-2 \sin(2x + n \cdot \frac{\pi}{2})) = -2^{n+1} \sin(2x + n \cdot \frac{\pi}{2}).$$

Natomiast po wstawieniu $n + 1$ w miejsce n mamy

$$(\cos 2x)^{(n+1)} = 2^{n+1} \cos(2x + (n+1) \cdot \frac{\pi}{2}) = 2^{n+1} \cos(2x + n \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}).$$

Prawdziwość obu wzorów wynika z równości $\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin x$. Mianowicie,

$$\cos(2x + n \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}) = -\sin(2x + n \cdot \frac{\pi}{2}).$$

Zatem

$$(\sin^2 x)^{(n)} = (\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x)^{(n)} = -2^{n-1} \cos(2x + n \cdot \frac{\pi}{2}), \quad n \geq 1,$$

oraz

$$(\cos^2 x)^{(n)} = (\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x)^{(n)} = 2^{n-1} \cos(2x + n \cdot \frac{\pi}{2}), \quad n \geq 1.$$

Zauważmy na koniec, że wnioskiem z jedynek trygonometrycznej, czyli $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, jest tożsamość

$$(\cos^2 x)^{(n)} = -(\sin^2 x)^{(n)}, \quad n \geq 1,$$

dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

Przykład 16. Obliczyć pochodną $h^{(10)}(0)$, gdzie $h(x) = x^3 e^{-x}$.

Rozwiązanie: Mamy obliczyć pochodną h rzędu $n = 10$ w punkcie $x = 0$. W tym celu wykorzystamy wzór Leibniza na pochodną rzędu n iloczynu dwóch funkcji. Mianowicie

$$(f(x)g(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x). \quad (4)$$

Powyższy wzór, prawdziwy dla $n \geq 1$, jest uogólnieniem wzoru $(fg)' = f'g + fg'$ i dowodzi się go indukcyjnie. Tak jak wcześniej, $f^{(0)}(x) = f(x)$. W szczególności, dla $n = 2$ mamy

$$(f(x)g(x))'' = f(x)g''(x) + 2f'(x)g'(x) + f''(x)g(x),$$

a dla $n = 3$

$$(f(x)g(x))''' = f(x)g'''(x) + 3f'(x)g''(x) + 3f''(x)g'(x) + f'''(x)g(x).$$

Zauważmy, że funkcję h można zapisać jako iloczyn dwóch funkcji, tzn. $h(x) = f(x)g(x)$, gdzie $f(x) = x^3$ i $g(x) = e^{-x}$. Ponadto

$$f'(x) = 3x^2, \quad f''(x) = 6x, \quad f'''(x) = 6, \quad f^{(n)}(x) = 0, \quad n \geq 4,$$

oraz $g^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot e^{-x}$. Zatem $g^{(n)}(0) = (-1)^n$ i pochodna f jest różna od zera tylko dla $n = 3$ oraz $f^{(3)}(0) = 6$. Pozostałe pochodne w punkcie $x = 0$ są równe zero. Stąd, po podstawieniu $x = 0$ do wzoru

$$h^{(10)}(x) = (f(x)g(x))^{(10)} = \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} f^{(k)}(x)g^{(10-k)}(x),$$

pozostanie tylko jeden niezerowy składnik dla $k = 3$. Zatem

$$h^{(10)}(0) = \binom{10}{3} f^{(3)}(0)g^{(7)}(0) = 120 \cdot 6 \cdot (-1) = -720.$$

Przykład 17. Obliczyć pochodną dowolnego rzędu n w punkcie $x_0 = 0$, tzn. $f^{(n)}(0)$, funkcji $f(x) = \arctg x$.

Rozwiązanie: Pierwsze dwie pochodne rozważanej funkcji dane są wzorami

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad f''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}.$$

Zatem $f'(0) = 1$ oraz $f''(0) = 0$. Ponadto, zachodzi także równość

$$(1+x^2)f'(x) = 1,$$

w której po lewej stronie występuje iloczyn dwóch funkcji, tzn. $1 + x^2$ oraz $f'(x)$. Dzięki temu możemy wykorzystać wzór Leibniza (4). Za pierwszą funkcję przyjmujemy $f'(x)$, a za drugą $g(x) = 1 + x^2$. Następnie, zauważmy, że

$$g^{(0)}(x) = 1 + x^2, \quad g^{(1)}(x) = 2x, \quad g^{(2)}(x) = 2, \quad g^{(n)}(x) = 0, \quad n \geq 3.$$

Oznacza to, że spośród $n + 1$ składników we wzorze (4) tylko trzy będą niezerowe. Są to te składniki, dla których $n - k$ równa się 0, 1 lub 2, czyli dla k równego n , $n - 1$ lub $n - 2$. Odpowiednie współczynniki Newtona równe są

$$\binom{n}{n} = 1, \quad \binom{n}{n-1} = n, \quad \binom{n}{n-2} = \frac{1}{2}n(n-1), \quad n \geq 2.$$

Wzór (4) przyjmuje więc postać

$$(1 + x^2)f^{(n+1)}(x) + 2nx f^{(n)}(x) + n(n-1)f^{(n-1)}(x) = 0, \quad n \geq 2.$$

Do powyższej równości wstawiamy $x = 0$ i dostajemy wzór rekurencyjny

$$f^{(n+1)}(0) = -n(n-1)f^{(n-1)}(0), \quad n \geq 2.$$

Ponieważ $f^{(2)}(0) = 0$, zatem dowolna pochodna stopnia parzystego równa jest 0, czyli $f^{(2n)}(0) = 0$, dla $n \geq 1$. Niech teraz $n = 2k$, gdzie $k \geq 1$. Wówczas

$$f^{(2k+1)}(0) = -(2k-1)2k f^{(2k-1)}(0), \quad k \geq 1,$$

i wynika stąd, że

$$f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k \cdot (2k)!, \quad k \geq 0.$$

Podsumowując, możemy zapisać

$$(\arctg x)_{x=0}^{(n)} = \begin{cases} 0, & n = 2k, k \geq 0, \\ (-1)^k \cdot (2k)!, & n = 2k + 1, k \geq 0. \end{cases}$$

Literatura

- [1] Fichtenholz G.M., Rachunek różniczkowy i całkowy, tom 1, PWN, Warszawa, 2007
- [2] Krywicki W., Włodarski L., Analiza matematyczna w zadaniach, część I, PWN, Warszawa, 2010

Ciągi zadane rekurencyjnie

Przykład 18. Wyznacz 8 początkowych wyrazów ciągu $\{a_n\}$ danego wzorem rekurencyjnym:

$$a_1 = 2, \quad a_n = (-1)^n \cdot a_{n-1} + 2, \quad n \geq 2.$$

Rozwiązanie: Mamy:

$$\begin{aligned} a_1 &= 2, & a_2 &= (-1)^2 \cdot a_1 + 2 = 2 + 2 = 4, \\ a_3 &= (-1)^3 \cdot a_2 + 2 = -4 + 2 = -2, & a_4 &= (-1)^4 \cdot a_3 + 2 = -2 + 2 = 0, \\ a_5 &= (-1)^5 \cdot a_4 + 2 = 0 + 2 = 2, & a_6 &= (-1)^6 \cdot a_5 + 2 = 2 + 2 = 4, \\ a_7 &= (-1)^7 \cdot a_6 + 2 = -4 + 2 = -2, & a_8 &= (-1)^8 \cdot a_7 + 2 = -2 + 2 = 0. \end{aligned}$$

Przykład 19. Ciąg $\{a_n\}$ dany jest wzorem rekurencyjnym

$$a_1 = 1, \quad a_n = 2a_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + n, \quad n \geq 2.$$

Oblicz wyrazy a_2 i a_9 .

Rozwiązanie: Wyraz a_2 obliczamy bezpośrednio ze wzoru rekurencyjnego

$$a_2 = 2a_{\lfloor \frac{2}{2} \rfloor} + 2 = 2a_1 + 2 = 2 \cdot 1 + 2 = 4.$$

Obliczenie wartości wyrazu a_9 wymaga wcześniejszego obliczenia wszystkich wyrazów go poprzedzających. Mamy:

$$\begin{aligned} a_3 &= 2a_{\lfloor \frac{3}{2} \rfloor} + 3 = 2a_1 + 3 = 2 + 3 = 5, \\ a_4 &= 2a_{\lfloor \frac{4}{2} \rfloor} + 4 = 2a_2 + 4 = 8 + 4 = 12, \end{aligned}$$

$$a_5 = 2a_{\lfloor \frac{5}{2} \rfloor} + 5 = 2a_2 + 5 = 8 + 5 = 13,$$

$$a_6 = 2a_{\lfloor \frac{6}{2} \rfloor} + 6 = 2a_3 + 6 = 10 + 6 = 16,$$

$$a_7 = 2a_{\lfloor \frac{7}{2} \rfloor} + 7 = 2a_3 + 7 = 10 + 7 = 17,$$

$$a_8 = 2a_{\lfloor \frac{8}{2} \rfloor} + 8 = 2a_4 + 8 = 24 + 8 = 32,$$

$$a_9 = 2a_{\lfloor \frac{9}{2} \rfloor} + 9 = 2a_4 + 9 = 24 + 9 = 33.$$

Przykład 20. Ciąg Jacobsthala-Lucasa $\{J_n\}$ definiujemy rekurencyjnie w następujący sposób:

$$J_0 = 2, \quad J_1 = 1, \quad J_n = J_{n-1} + 2J_{n-2}, \quad n \geq 2.$$

Wyznacz kilka początkowych wyrazów tego ciągu. Na tej podstawie zaproponuj a następnie udowodnij wzór ogólny tego ciągu.

Rozwiązanie: Dwa początkowe wyrazy ciągu $\{J_n\}$ są dane: $J_0 = 2$, $J_1 = 1$. Obliczamy kilka kolejnych wyrazów ciągu $\{J_n\}$:

$$J_2 = J_1 + 2J_0 = 1 + 2 \cdot 2 = 5,$$

$$J_3 = J_2 + 2J_1 = 5 + 2 \cdot 1 = 7,$$

$$J_4 = J_3 + 2J_2 = 7 + 2 \cdot 5 = 17,$$

$$J_5 = J_4 + 2J_3 = 17 + 2 \cdot 7 = 31,$$

$$J_6 = J_5 + 2J_4 = 31 + 2 \cdot 17 = 65,$$

$$J_7 = J_6 + 2J_5 = 65 + 2 \cdot 31 = 127.$$

Łatwo zauważamy, że wyrazy ciągu $\{J_n\}$ są kolejnymi potęgami liczby 2 cyklicznie powiększonymi i pomniejszonymi o 1. Możemy więc postawić hipotezę:

$$J_n = 2^n + (-1)^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

Zaproponowany wzór udowodnimy indukcyjnie. Dla $n = 0$ i $n = 1$ wzór (5) jest poprawny, mamy bowiem

$$J_0 = 2^0 + (-1)^0 = 1 + 1 = 2, \quad J_1 = 2^1 + (-1)^1 = 2 - 1 = 1.$$

Załóżmy teraz, że wzór (5) jest poprawny dla dowolnie wybranej liczby n . Wtedy

$$\begin{aligned} J_n &= J_{n-1} + 2J_{n-2} = 2^{n-1} + (-1)^{n-1} + 2(2^{n-2} + (-1)^{n-2}) = \\ &= 2^{n-1} + 2^{n-1} + (-1)^{n-1} + 2 \cdot (-1)^{n-2} = 2^n - (-1)^{n-2} + 2 \cdot (-1)^{n-2} = 2^n + (-1)^{n-2} = \\ &= 2^n + (-1)^n, \end{aligned}$$

co kończy dowód poprawności wzoru (5).

Przykład 21. Wiadomo, że wielomian charakterystyczny jednorodnej rekurencji liniowej ma dwa pierwiastki jednokrotne równe -2 i 2 . Podaj postać tej rekurencji oraz jej rozwiązanie przy warunkach początkowych $a_1 = 0$, $a_2 = 8$.

Rozwiązanie: Z treści zadania wynika, że wielomian charakterystyczny ma postać:

$$w(\lambda) = (\lambda + 2)(\lambda - 2) = \lambda^2 - 4.$$

Stąd otrzymujemy równanie jednorodnej rekurencji liniowej

$$a_n - 4a_{n-2} = 0.$$

Uwzględniając warunki początkowe dostajemy wzór rekurencyjny opisujący ciąg $\{a_n\}$:

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 8, \quad a_n = 4a_{n-2}, \quad n \geq 3.$$

Postać ogólna wzoru jawnego ciągu $\{a_n\}$:

$$a_n = C_1 \cdot (-2)^n + C_2 \cdot 2^n,$$

gdzie C_1, C_2 są stałymi rzeczywistymi. Wyznaczymy je biorąc pod uwagę wartości początkowe ciągu $\{a_n\}$. Mamy

$$a_1 = -2C_1 + 2C_2 = 0, \quad \text{oraz} \quad a_2 = 4C_1 + 4C_2 = 8.$$

Rozwiązaniem układu równań

$$\begin{cases} -2C_1 + 2C_2 = 0, \\ 4C_1 + 4C_2 = 8, \end{cases} \iff \begin{cases} C_1 - C_2 = 0, \\ C_1 + C_2 = 2, \end{cases}$$

są liczby $C_1 = 1$ i $C_2 = 1$. Zatem wzorem jawnym ciągu $\{a_n\}$ jest

$$a_n = (-2)^n + 2^n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Przykład 22. Wiadomo, że wielomian charakterystyczny jednorodnej rekurencji liniowej ma trzykrotny pierwiastek równy 2. Podaj postać tej rekurencji oraz jej rozwiązanie przy warunkach początkowych $a_0 = 0, a_1 = 0, a_2 = 8$.

Rozwiązanie: Z treści zadania wynika, że wielomian charakterystyczny ma postać:

$$w(\lambda) = (\lambda - 2)^3 = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8.$$

Stąd otrzymujemy równanie jednorodnej rekurencji liniowej

$$a_n - 6a_{n-1} + 12a_{n-2} - 8a_{n-3} = 0.$$

Uwzględniając warunki początkowe dostajemy wzór rekurencyjny opisujący ciąg $\{a_n\}$:

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 8, \quad a_n = 6a_{n-1} - 12a_{n-2} + 8a_{n-3}, \quad n \geq 3.$$

Postać ogólna wzoru jawnego ciągu $\{a_n\}$:

$$a_n = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot n \cdot 2^n + C_3 \cdot n^2 \cdot 2^n = (C_1 + C_2 \cdot n + C_3 \cdot n^2) \cdot 2^n,$$

gdzie C_1, C_2, C_3 są stałymi rzeczywistymi. Wyznamy je biorąc pod uwagę wartości początkowe ciągu $\{a_n\}$. Mamy

$$n = 0 \Rightarrow (C_1 + C_2 \cdot 0 + C_3 \cdot 0^2) \cdot 2^0 = a_0 \Rightarrow C_1 = 0,$$

$$n = 1 \Rightarrow (C_1 + C_2 \cdot 1 + C_3 \cdot 1^2) \cdot 2^1 = a_1 \Rightarrow 2(C_1 + C_2 + C_3) = 0,$$

$$n = 2 \Rightarrow (C_1 + C_2 \cdot 2 + C_3 \cdot 2^2) \cdot 2^2 = a_2 \Rightarrow 4(C_1 + 2C_2 + 4C_3) = 8.$$

Otrzymujemy stąd układ równań

$$\begin{cases} C_1 = 0, \\ 2(C_1 + C_2 + C_3) = 0, \\ 4(C_1 + 2C_2 + 4C_3) = 8, \end{cases} \iff \begin{cases} C_1 = 0, \\ C_2 + C_3 = 0, \\ C_2 + 2C_3 = 1, \end{cases}$$

k którego rozwiązaniem są liczby $C_1 = 0, C_2 = -1$ i $C_3 = 1$. Zatem wzorem jawnym ciągu $\{a_n\}$ jest

$$a_n = (n^2 - n) \cdot 2^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Przykład 23. Wiadomo, że wielomian charakterystyczny jednorodnej rekurencji liniowej ma dwa pierwiastki jednokrotne równe -2 i 2 oraz jeden pierwiastek dwukrotny równy -1 . Podaj postać tej rekurencji oraz jej rozwiązanie przy warunkach początkowych $a_0 = 2, a_1 = 1, a_2 = 6$ i $a_3 = 3$.

Rozwiązanie: Z treści zadania wynika, że wielomian charakterystyczny ma postać:

$$w(\lambda) = (\lambda + 2)(\lambda - 2)(\lambda + 1)^2 = (\lambda^2 - 4)(\lambda^2 + 2\lambda + 1) = \lambda^4 + 2\lambda^3 - 3\lambda^2 - 8\lambda - 4.$$

Stąd otrzymujemy równanie jednorodnej rekurencji liniowej

$$a_n + 2a_{n-1} - 3a_{n-2} - 8a_{n-3} - 4a_{n-4} = 0.$$

Uwzględniając warunki początkowe dostajemy wzór rekurencyjny opisujący ciąg $\{a_n\}$:

$$a_0 = 2, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 6, \quad a_3 = 3, \quad a_n = -2a_{n-1} + 3a_{n-2} + 8a_{n-3} - 4a_{n-4}, \quad n \geq 4.$$

Postać ogólna wzoru jawnego ciągu $\{a_n\}$:

$$a_n = C_1 \cdot (-2)^n + C_2 \cdot 2^n + C_3 \cdot (-1)^n + C_4 \cdot (-1)^n \cdot n,$$

gdzie C_1, C_2, C_3, C_4 są stałymi rzeczywistymi. Wyznamy je biorąc pod uwagę wartości początkowe ciągu $\{a_n\}$. Mamy

$$n = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 + C_2 + C_3 = a_0,$$

$$n = 1 \quad \Rightarrow \quad -2C_1 + 2C_2 - C_3 - C_4 = a_1,$$

$$n = 2 \quad \Rightarrow \quad 4C_1 + 4C_2 + C_3 + 2C_4 = a_2,$$

$$n = 3 \quad \Rightarrow \quad -8C_1 + 8C_2 - C_3 - 3C_4 = a_3.$$

Rozwiązaniem otrzymanego układu równań są liczby $C_1 = 1$, $C_2 = 1$, $C_3 = 0$ i $C_4 = -1$. Zatem wzorem jawnym ciągu $\{a_n\}$ jest

$$a_n = (-2)^n + 2^n + (-1)^{n+1} \cdot n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Przykład 24. Ciąg $\{a_n\}$ dany jest równaniem rekurencyjnym

$$a_0 = 2, \quad a_1 = -1, \quad a_n = -a_{n-1} + 6a_{n-2}, \quad n \geq 2.$$

Wyznacz wzór jawny ciągu $\{a_n\}$.

Rozwiązanie: Równanie rekurencyjne $a_n = -a_{n-1} + 6a_{n-2}$ zapiszmy w postaci

$$a_n + a_{n-1} - 6a_{n-2} = 0. \quad (6)$$

Równaniem charakterystycznym jest wtedy

$$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0, \quad \text{czyli} \quad (\lambda + 3)(\lambda - 2) = 0.$$

Stąd pierwiastkami równania charakterystycznego są liczby $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 2$. Zatem rozwiązaniem ogólnym równania rekurencyjnego (6) jest ciąg

$$a_n = C_1 \cdot (-3)^n + C_2 \cdot 2^n,$$

gdzie C_1, C_2 są dowolnymi stałymi rzeczywistymi. Wyznamy teraz wartości tych stałych korzystając z warunków początkowych $a_0 = 2$ i $a_1 = -1$. Mamy

$$\begin{aligned} 2 = a_0 &= C_1 \cdot (-3)^0 + C_2 \cdot 2^0 = C_1 + C_2, \\ -1 = a_1 &= C_1 \cdot (-3)^1 + C_2 \cdot 2^1 = -3C_1 + 2C_2. \end{aligned}$$

Otrzymaliśmy układ równań

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 2, \\ -3C_1 + 2C_2 = -1. \end{cases}$$

Łatwo sprawdzić, że rozwiązaniem tego układu równań są liczby $C_1 = 1$, $C_2 = 1$, więc poszukiwanym wzorem ogólnym ciągu $\{a_n\}$ jest

$$a_n = (-3)^n + 2^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Przykład 25. Ciąg Pella $\{P_n\}$ dany jest wzorem rekurencyjnym

$$P_0 = 0, \quad P_1 = 1, \quad P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}, \quad n \geq 2.$$

Wyznacz wzór ogólny ciągu Pella.

Rozwiązanie: Zapisując równanie rekurencyjne ciągu Pella w postaci

$$P_n - 2P_{n-1} - P_{n-2} = 0,$$

dostajemy równanie charakterystyczne

$$\lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0.$$

Rozwiązujemy je

$$(\lambda - 1)^2 - 2 = 0 \quad \iff \quad (\lambda - 1 + \sqrt{2})(\lambda - 1 - \sqrt{2}) = 0,$$

otrzymując dwa pierwiastki: $\lambda_1 = 1 - \sqrt{2}$ i $\lambda_2 = 1 + \sqrt{2}$.

Zatem rozwiązaniem ogólnym równania rekurencyjnego jest ciąg postaci

$$P_n = C_1(1 - \sqrt{2})^n + C_2(1 + \sqrt{2})^n, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Wartości stałych C_1 i C_2 obliczymy biorąc pod uwagę początkowe wyrazy ciągu Pella.

Mamy

$$P_0 = C_1(1 - \sqrt{2})^0 + C_2(1 + \sqrt{2})^0 = C_1 + C_2 \quad \wedge \quad P_0 = 0,$$

$$P_1 = C_1(1 - \sqrt{2}) + C_2(1 + \sqrt{2}) \quad \wedge \quad P_1 = 1.$$

Dostajemy stąd układ równań

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ C_1(1 - \sqrt{2}) + C_2(1 + \sqrt{2}) = 1, \end{cases} \iff \begin{cases} C_2 = -C_1, \\ C_1 - \sqrt{2}C_1 - C_1 - \sqrt{2}C_1 = 1, \end{cases}$$

którego rozwiązaniem są liczby: $C_1 = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$, $C_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}}$. Możemy teraz wyznaczyć wzór jawny ciągu Pella:

$$P_n = -\frac{1}{2\sqrt{2}}(1 - \sqrt{2})^n + \frac{1}{2\sqrt{2}}(1 + \sqrt{2})^n = \frac{(1 + \sqrt{2})^n - (1 - \sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Przykład 26. Mówimy, że rozwiązujący pewien problem student jest na n -tym etapie, jeżeli do rozwiązania problemu pozostaje mu n kroków ($n \geq 1$). Na każdym etapie ma on 5 możliwości postępowania. Dwie z nich prowadzą go z n -tego do $(n-1)$ -go etapu, a pozostałe 3 z n -tego do $(n-2)$ -go etapu. Niech a_n oznacza liczbę sposobów rozwiązania problemu zaczynając od n -tego etapu. Przyjmując, że problem na pierwszym etapie można rozwiązać na 5 sposobów, a na drugim na 13, wyznacz liczbę sposobów rozwiązania problemu w ogólnej sytuacji czyli na n -tym etapie.

Rozwiązanie: Niech a_n oznacza liczbę sposobów rozwiązania zadania na n -tym etapie.

Wtedy, zgodnie z treścią zadania,

$$a_1 = 5, \quad a_2 = 13, \quad a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}, \quad n \geq 3.$$

Zapisując równanie rekurencyjne w postaci

$$a_n - 2a_{n-1} - 3a_{n-2} = 0,$$

dostajemy równanie charakterystyczne

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0.$$

Obliczamy wyróżnik i pierwiastki równania charakterystycznego:

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 16, \quad \lambda_1 = \frac{2-4}{2} = -1, \quad \lambda_2 = \frac{2+4}{2} = 3.$$

Stąd rozwiązaniem ogólnym rozpatrywanej rekurencji jest ciąg

$$a_n = C_1 \cdot (-1)^n + C_2 \cdot 3^n, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Stałe C_1 , C_2 wyznaczymy w oparciu o początkowe wyrazy ciągu $\{a_n\}$. Mamy

$$\begin{cases} -C_1 + 3C_2 = 5, \\ C_1 + 9C_2 = 13, \end{cases} \Rightarrow 12C_2 = 18 \Rightarrow C_2 = \frac{3}{2}, \quad C_1 = -\frac{1}{2}.$$

Ostatecznie, student na n -tym etapie rozwiązania zadania ma dyspozycji

$$a_n = -\frac{1}{2} \cdot (-1)^n + \frac{3}{2} \cdot 3^n = \frac{(-1)^{n+1} + 3^{n+1}}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

możliwości postępowania.

Przykład 27. Załóżmy, że wchodzimy po schodach zbudowanych z n stopni i że w każdym kroku możemy pokonać jeden albo dwa stopnie. Oblicz na ile sposobów możemy wejść na schody przestrzegając opisanych reguł.

Rozwiązanie: Niech a_n oznacza liczbę sposobów wejścia po tych schodach zbudowanych z n stopni. Wtedy $a_1 = 1$, zaś $a_2 = 2$. Natomiast dla $n \geq 3$ mamy:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}.$$

Rzeczywiście, pokonując w pierwszym kroku jeden schodek, pozostałe możemy pokonać na a_{n-1} sposobów, albo pokonując w pierwszym kroku dwa schodki, pozostałe możemy pokonać na a_{n-2} sposobów. Kolejne wyrazy tego ciągu to: 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...

Wyznamy postać jawną ciągu $\{a_n\}$. W tym celu rozwiążmy odpowiadające mu równanie charakterystyczne

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0.$$

Mamy

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 5, \quad \lambda_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Stąd rozwiązanie ogólne rozpatrywanej rekurencji ma postać:

$$a_n = C_1 \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2 \cdot \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Uwzględniając wyrazy początkowe ciągu $\{a_n\}$ dostajemy układ równań

$$\begin{cases} C_1 \cdot \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + C_2 \cdot \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = 1, \\ C_1 \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2 + C_2 \cdot \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^2 = 2, \end{cases} \iff \begin{cases} C_1 \cdot (1 + \sqrt{5}) + C_2 \cdot (1 - \sqrt{5}) = 2, \\ C_1 \cdot (3 + \sqrt{5}) + C_2 \cdot (3 - \sqrt{5}) = 4, \end{cases}$$

którego rozwiązaniem są liczby: $C_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$ i $C_2 = -\frac{1 - \sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$.

Ostatecznie, ciąg $\{a_n\}$ jest opisany wzorem jawnym

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Uwaga. Ciąg $\{F_n\}$ o wyrazach

$$F_0 = 1, \quad F_1 = 1, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad n \geq 2,$$

czyli ciąg spełniający zależność rekurencyjną z powyższego przykładu, nazywa się *ciągami Fibonacciego*, a jego elementy *liczbami Fibonacciego*.

Przykład 28. Rekurencję

$$\begin{cases} t_0 = 3, \\ 5t_n = nt_{n-1} + 2 \cdot n!, \quad \text{dla } n \geq 1, \end{cases}$$

rozwiąż metodą czynnika sumacyjnego.

Rozwiązanie: Mamy

$$a_n = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 5, & n \geq 1, \end{cases} \quad b_n = n, \quad n \geq 1, \quad c_n = \begin{cases} 3, & n = 0, \\ 2 \cdot n!, & n \geq 1. \end{cases}$$

Obliczamy wyrazy czynnika sumacyjnego $\{s_n\}$:

$$s_n = \frac{a_0 a_1 \cdots a_{n-1}}{b_1 b_2 \cdots b_n} = \frac{5^{n-1}}{n!}.$$

Wstawiając powyższe wyrażenia do wzoru

$$t_n = \frac{1}{a_n s_n} \left(s_1 b_1 t_0 + \sum_{k=1}^n c_k s_k \right), \quad n \geq 1,$$

otrzymujemy:

$$\begin{aligned} t_n &= \frac{n!}{5^n} \left(1 \cdot 1 \cdot 3 + \sum_{k=1}^n \frac{5^{k-1}}{k!} \cdot 2 \cdot k! \right) = \\ &= \frac{n!}{5^n} \left(3 + 2 \sum_{k=1}^n 5^{k-1} \right) = \frac{n!}{5^n} \left(3 + \frac{5^n - 1}{2} \right) = \frac{(5^{n-1} + 1) \cdot n!}{2 \cdot 5^{n-1}}. \end{aligned}$$

Przykład 29. Ciąg $\{a_n\}$ dany jest zależnością rekurencyjną

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}, \quad n \geq 2.$$

Przy pomocy funkcji tworzącej wyznacz wzór ogólny ciągu $\{a_n\}$.

Rozwiązanie: Funkcja tworząca ciąg $\{a_n\}$ ma postać

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = 0 + x + \sum_{n=2}^{\infty} (2a_{n-1} - a_{n-2}) x^n = \\ &= x + 2 \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^n - \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n = x + 2x \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^{n-1} - x^2 \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n-2} = \\ &= x + 2x \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n - x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = x + 2x f(x) - x^2 f(x). \end{aligned}$$

Otrzymujemy stąd równanie:

$$f(x) = x + 2x f(x) - x^2 f(x),$$

czyli

$$f(x) = \frac{x}{1 - 2x + x^2} = \frac{x}{(1 - x)^2}.$$

Przypomnijmy, że dla $|x| < 1$, ze wzoru na sumę szeregu geometrycznego o ilorazie x , wynika równość

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Różniczkując je stronami mamy

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Widzimy więc, że $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \sum_{n=0}^{\infty} nx^n$. Stąd

$$a_n = n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Przykład 30. Niech ciąg $\{a_n\}$ będzie określony następująco

$$a_1 = 2, \quad a_n = 2 - \frac{1}{a_{n-1}}, \quad n \geq 2.$$

Uzasadnij, że ciąg ten jest zbieżny i oblicz jego granicę.

Rozwiązanie: Analizując kilka początkowych wyrazów ciągu $\{a_n\}$ widzimy, że

$$\begin{aligned} a_1 &= 2, \\ a_2 &= 2 - \frac{1}{a_1} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \\ a_3 &= 2 - \frac{1}{a_2} = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}, \\ a_4 &= 2 - \frac{1}{a_3} = 2 - \frac{3}{4} = \frac{5}{4}. \end{aligned}$$

Możemy więc postawić hipotezę, że $a_n = \frac{n+1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Udowodnimy ją indukcyjnie.

Dla $n = 1$ mamy

$$a_1 = 2 = \frac{1+1}{1}.$$

Założmy teraz, że dla dowolnie ustalonej liczby naturalnej n jest $a_n = \frac{n+1}{n}$. Wtedy

$$a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n} = 2 - \frac{n}{n+1} = \frac{2n+2-n}{n+1} = \frac{n+2}{n+1},$$

co kończy dowód indukcyjny.

Zbieżność ciągu $\{a_n\}$ wynika teraz ze zbieżności ciągu $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ i łatwo obliczamy jego granicę:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = 1.$$

Przykład 31. Ciąg $\{a_n\}$ określony jest następująco

$$a_1 = \sqrt{3}, \quad a_n = \sqrt{3 \cdot a_{n-1}}, \quad n \geq 2.$$

Uzasadnij zbieżność i wyznacz granicę ciągu $\{a_n\}$.

Rozwiązanie: Pokażemy, że ciąg $\{a_n\}$ jest rosnący i ograniczony z góry.

Zauważmy, że dla dowolnego $n \geq 2$ mamy

$$a_n = a_{n-1} \cdot \sqrt[2]{3}. \quad (7)$$

Rzeczywiście

$$a_2 = \sqrt{3 \cdot a_1} = \sqrt{3 \cdot \sqrt{3}} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{\sqrt{3}} = a_1 \cdot \sqrt[4]{3}.$$

Zakładając, że dla dowolnie ustalonej liczby n jest $a_n = a_{n-1} \cdot \sqrt[2]{3}$, dostajemy

$$a_{n+1} = \sqrt{3 \cdot a_n} = \sqrt{3 \cdot a_{n-1} \cdot \sqrt[2]{3}} = \sqrt{3 \cdot a_{n-1}} \cdot \sqrt{\sqrt[2]{3}} = a_n \cdot \sqrt[2]{\sqrt[2]{3}},$$

co na mocy zasady indukcji matematycznej dowodzi (7). Stąd

$$a_n = a_{n-1} \cdot \sqrt[2]{3} > a_{n-1},$$

czyli ciąg $\{a_n\}$ jest rosnący.

Udowodnimy teraz, że $a_n \leq 3$, dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Oczywiście $a_1 = \sqrt{3} \leq 3$.

Zakładając, że $a_n \leq 3$ dla dowolnie ustalonego n , dostajemy

$$a_{n+1} = \sqrt{3 \cdot a_n} \leq \sqrt{3 \cdot 3} = 3.$$

Ciąg $\{a_n\}$ jako rosnący i ograniczony z góry jest zbieżny. Niech g oznacza jego granicę.

Wtedy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{3 \cdot a_{n-1}} \iff g = \sqrt{3 \cdot g}.$$

Ostatnie równanie ma dwa rozwiązania: $g = 0$ lub $g = 3$. Ponieważ wszystkie wyrazy ciągu $\{a_n\}$ są nie mniejsze niż $\sqrt{3}$, to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3.$$

Przykład 32. Uzasadnij zbieżność i wyznacz granicę ciągu $\{a_n\}$ określonego wzorem rekurencyjnym:

$$a_1 = \sqrt{2}, \quad a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}, \quad n \geq 2.$$

Rozwiązanie: Pokażemy, że ciąg $\{a_n\}$ jest rosnący i ograniczony z góry. Łatwo stwierdzić, że liczba 2 jest górnym ograniczeniem ciągu $\{a_n\}$. Rzeczywiście mamy $a_1 = \sqrt{2} < 2$ oraz zakładając, że $a_n \leq 2$ dostajemy

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \leq \sqrt{2 + 2} = 2,$$

dla dowolnego $n \geq 2$.

Monotoniczność ciągu $\{a_n\}$ wynika z faktu, że

$$a_{n+1}^2 - a_n^2 = -a_n^2 + a_n + 2 = (a_n + 1)(2 - a_n) > 0,$$

dla $0 \leq a_n \leq 2$. Zatem ciąg $\{a_n\}$ jest zbieżny jako rosnący i ograniczony z góry. Istnieje więc liczba $g = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. Przechodząc w równości $a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}$ do granicy, przy $n \rightarrow \infty$, dostajemy

$$g = \sqrt{2 + g} \quad \Rightarrow \quad g = 2.$$

Ostatecznie $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$.

Przykład 33. Niech a i b będą ustalonymi liczbami nieujemnymi. Pokaż, że ciągi $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ określone w następujący sposób:

$$a_1 = a, \quad b_1 = b, \quad a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot b_{n-1}}, \quad b_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}, \quad n \geq 2,$$

mają wspólną granicę.

Uwaga. Granicę tę nazywamy *arytmetyczno-geometryczną średnią Gaussa* liczb a i b oraz oznaczamy ją symbolem $\mu(a, b)$.

Rozwiązanie: Z nierówności między średnią arytmetyczną i średnią geometryczną mamy $a_n \leq b_n$, $n \in \mathbb{N}$. Stąd

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n \cdot b_n} \geq \sqrt{a_n \cdot a_n} = a_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

czyli ciąg $\{a_n\}$ jest rosnący. Natomiast ciąg $\{b_n\}$ jest malejący, gdyż

$$b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \leq \frac{b_n + b_n}{2} = b_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ponadto oba ciągi są ograniczone, mamy bowiem

$$a_n > b_1, \quad b_n < a_1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Oznacza to, że oba ciągi są zbieżne.

Niech $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ oraz $\beta = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$. Przechodząc do granicy w równości $b_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$, dostajemy $\beta = \frac{\alpha + \beta}{2}$. Stąd $\alpha = \beta$.

Literatura

- [1] J. Banaś, S. Wędrychowicz, *Zbiór zadań a analizy matematycznej*, WNT, Warszawa 1999.
- [2] R.L. Graham, D.E. Knuth, O. Patashnik, *Matematyka konkretna*, PWN, Warszawa 2011.
- [3] W. Kaczor, M. Nowak, *Zadania z analizy matematycznej, Liczby rzeczywiste, ciągi i szeregi liczbowe*, PWN, Warszawa 2005.
- [4] K.A. Ross, Ch.R.B. Wright, *Matematyka dyskretna*, PWN, Warszawa 2012.

Kongruencje

Przykład 34. Wyznacz resztę z dzielenia liczby 9^{2025} przez 17.

Rozwiązanie: Ponieważ liczba 9 nie jest podzielna przez liczbę pierwszą 17, to na mocy małego twierdzenia Fermata mamy

$$9^{16} \equiv 1 \pmod{17}.$$

Wynika stąd, że dla dowolnej liczby naturalnej k zachodzi

$$9^{16k} \equiv 1 \pmod{17},$$

a w konsekwencji

$$9^{2025} \equiv 9^{2025 \bmod 16} \equiv 9^9 \pmod{17}.$$

Ponieważ (wszystkie kongruencje modulo 17) $9^2 \equiv -4$, to $9^4 \equiv 16 \equiv -1$ i $9^8 \equiv 1$, więc ostatecznie

$$9^{2025} \equiv 9^9 \equiv 9^8 \cdot 9 \equiv 1 \cdot 9 \equiv 9 \pmod{17}.$$

Przykład 35. Uzasadnij, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ liczba

$$4^{2n+1} + 3^{n+2}$$

jest podzielna przez 13.

Rozwiązanie: Zaczynamy od sprawdzenia reszt z dzielenia przez 13 potęg liczb 3 i 4.

i	$3^i \bmod 13$	$4^i \bmod 13$
1	3	4
2	9	3
3	1	-1

Widzimy, że dla dowolnej liczby naturalnej k mamy

$$3^{3k} \equiv 1 \pmod{13} \quad \text{oraz} \quad 4^{6k} \equiv 1 \pmod{13}.$$

Rozważmy teraz trzy przypadki:

1. $n = 3k$,
2. $n = 3k + 1$,
3. $n = 3k + 2$

dla pewnego $k \in \mathbb{N}$. W sytuacji 1. otrzymujemy

$$4^{2n+1} + 3^{n+2} = 4^{6k} \cdot 4 + 3^{3k} \cdot 9 \equiv 4 + 9 \equiv 0 \pmod{13}.$$

Analogicznie, w sytuacji 2.,

$$4^{2n+1} + 3^{n+2} = 4^{6k} \cdot 4^3 + 3^{3k} \cdot 27 \equiv -1 + 1 \equiv 0 \pmod{13},$$

oraz, w sytuacji 3.,

$$4^{2n+1} + 3^{n+2} = 4^{6k} \cdot 4^5 + 3^{3k} \cdot 3^4 \equiv 10 + 3 \equiv 0 \pmod{13}.$$

Przykład 36. Wyznacz dwie ostatnie cyfry liczby 2^{2025} .

Rozwiązanie: Spróbujmy najpierw wyznaczyć resztę z dzielenia 2^{2025} przez 25. Ponieważ $\text{NWD}(2, 25) = 1$ oraz $\varphi(25) = \varphi(5^2) = 5^2 - 5^1 = 20$, to na mocy twierdzenia Eulera otrzymujemy

$$2^{20} \equiv 1 \pmod{25},$$

skąd

$$2^{20k} \equiv 1 \pmod{25}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

W konsekwencji

$$2^{2023} \equiv 2^{2024 \bmod 20} \equiv 2^3 \equiv 8 \pmod{25}.$$

Relację tę możemy zapisać równoważnie w postaci

$$2^{2023} = 8 + 25k$$

dla pewnego $k \in \mathbb{N}$. Mnożąc ostatnią równość przez 2^2 , otrzymujemy

$$2^{2025} = 32 + 100k,$$

co daje

$$2^{2025} \equiv 32 \pmod{100},$$

więc dwiema ostatnimi cyframi są 3 i 2.

Przykład 37. Wyznacz ostatnią cyfrę liczby

$$7^{7^{7^7}}.$$

Rozwiązanie: Zwróćmy na początek uwagę, że

$$7^{7^{7^7}} = 7^{\left(7^{\left(7^7\right)}\right)}.$$

Ponieważ $\varphi(10) = \varphi(2 \cdot 5) = \varphi(2)\varphi(5) = 4$, to na mocy twierdzenia Eulera mamy

$$7^4 \equiv 1 \pmod{10},$$

skąd dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$ otrzymujemy

$$7^k \equiv 7^{k \bmod 4} \pmod{10}.$$

Musimy zatem wyznaczyć resztę z dzielenia 7^{7^7} przez 4. Oczywiście $7^2 \equiv 1 \pmod{4}$, więc

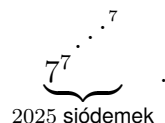
$$7^{7^7} \equiv 7^{7^7 \bmod 2} \equiv 7^1 \equiv 3 \pmod{4}.$$

Ostatecznie

$$7^{7^{7^7}} \equiv 7^{7^{7^7} \bmod 4} \equiv 7^3 \equiv 7^2 \cdot 7 \equiv (-1) \cdot 7 \equiv 3 \pmod{10},$$

czyli szukaną cyfrą jest 3.

Przykład 38. Wyznacz dwie ostatnie cyfry liczby



2025 siódemek

Rozwiązanie: Mamy $\varphi(100) = \varphi(2^2 \cdot 5^2) = \varphi(2^2)\varphi(5^2) = 2 \cdot 20 = 40$, więc na mocy twierdzenia Eulera otrzymujemy

$$7^k \equiv 7^{k \bmod 40} \pmod{100}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Analogicznie dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$ dostajemy

$$\varphi(40) = 24 \quad \Rightarrow \quad 7^k \equiv 7^{k \bmod 24} \pmod{40},$$

$$\varphi(24) = 12 \quad \Rightarrow \quad 7^k \equiv 7^{k \bmod 12} \pmod{24},$$

$$\varphi(12) = 4 \quad \Rightarrow \quad 7^k \equiv 7^{k \bmod 4} \pmod{12},$$

$$\varphi(4) = 2 \quad \Rightarrow \quad 7^k \equiv 7^{k \bmod 2} \pmod{4}.$$

Jednocześnie

$$\underbrace{7^{\overbrace{7^{\overbrace{\dots}^7}^7}^7}}_{2020 \text{ siódemek}} \equiv 1 \pmod{2},$$

$$\underbrace{7^{\overbrace{7^{\overbrace{\dots}^7}^7}^7}}_{2021 \text{ siódemek}} \equiv 7^1 \equiv 3 \pmod{4},$$

$$\underbrace{7^{\overbrace{7^{\overbrace{\dots}^7}^7}^7}}_{2022 \text{ siódemki}} \equiv 7^3 \equiv 7 \pmod{12},$$

$$\underbrace{7^{\overbrace{7^{\overbrace{\dots}^7}^7}^7}}_{2023 \text{ siódemki}} \equiv 7^7 \equiv (7^2)^3 \cdot 7 \equiv 7 \pmod{24},$$

$$\underbrace{7^{\overbrace{7^{\overbrace{\dots}^7}^7}^7}}_{2024 \text{ siódemki}} \equiv 7^7 \equiv 23 \pmod{40},$$

$$\underbrace{7^{\overbrace{7^{\overbrace{\dots}^7}^7}^7}}_{2025 \text{ siódemek}} \equiv 7^{23} \equiv (7^4)^5 \cdot 7^3 \equiv 1 \cdot 7^3 \equiv 43 \pmod{100}.$$

Przykład 39. Wyznacz pięć ostatnich cyfr liczby

$$5^{5^{5^{5^5}}}.$$

Rozwiązanie: Zaczniemy od rozważenia reszty badanej liczby przy dzieleniu przez 2^5 .

Dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$ mamy $\text{NWD}(5, 2^k) = 1$ oraz

$$\varphi(2^k) = 2^k - 2^{k-1} = 2^{k-1}.$$

Na mocy twierdzenia Eulera otrzymujemy

$$\begin{aligned} 5^{5^{5^{5^5}}} &\equiv 5^{\left(5^{5^{5^5}} \bmod 2^4\right)} \equiv 5^{\left(5^{\left(5^{5^5} \bmod 2^3\right)} \bmod 2^4\right)} \equiv 5^{\left(5^{\left(5^{\left(5^{5^5} \bmod 2^2\right)} \bmod 2^3\right)} \bmod 2^4\right)} \equiv \\ &\equiv 5^{\left(5^{\left(5^1 \bmod 2^3\right)} \bmod 2^4\right)} \equiv 5^{\left(5^5 \bmod 2^4\right)} \equiv 5^5 \equiv 21 \pmod{2^5}, \end{aligned}$$

czyli

$$5^{5^{5^{5^5}}} = 21 + 2^5 k$$

dla pewnego $k \in \mathbb{N}$. Jednocześnie wiemy, że

$$5^{5^{5^{5^5}}} \equiv 0 \pmod{5^5},$$

skąd

$$2^5 k \equiv -21 \pmod{5^5}.$$

Znajdźmy odwrotność liczby $2^5 = 32$ według modułu $5^5 = 3125$.

d	q	t
3125		0
32	97	1
21	1	-97
11	1	98
10	1	-195
1	10	293
0		

Otrzymaliśmy $2^{-5} \equiv 293 \pmod{5^5}$, więc

$$k \equiv -21 \cdot 293 \equiv -6153 \equiv 97 \pmod{5^5},$$

lub równoważnie

$$k = 97 + 5^5 m$$

dla pewnego $m \in \mathbb{N}$, co prowadzi do

$$5^{5^{5^5}} = 21 + 2^5(97 + 5^5 m) = 3125 + 10^5 m.$$

Ostatecznie

$$5^{5^{5^5}} \equiv 3125 \pmod{10^5},$$

a zatem pięć ostatnich cyfr rozważanej liczby to 03125.

Przykład 40. Uzasadnij, że równanie

$$x^6 + y^6 + z^6 = 6$$

nie ma rozwiązań całkowitych.

Rozwiązanie: Załóżmy, że dla pewnych $x, y, z \in \mathbb{Z}$ rozważana równość zachodzi.

W szczególności

$$x^6 + y^6 + z^6 \equiv 11 \pmod{13}.$$

Z małego twierdzenia Fermata wynika, że dla dowolnego $a \in \mathbb{Z}$ mamy

$$a \equiv 0 \pmod{13} \quad \text{lub} \quad a^{12} \equiv 1 \pmod{13}.$$

W przypadku, gdy $a^{12} \equiv 1 \pmod{13}$, mamy również

$$(a^6 - 1)(a^6 + 1) \equiv 0 \pmod{13},$$

czyli

$$(a^6 - 1)(a^6 + 1) = 13k$$

dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$. Lewa strona ostatniej równości jest więc podzielna przez 13, więc jedna z liczb $a^6 - 1$ lub $a^6 + 1$ jest podzielna przez 13. Innymi słowy, $a^6 \equiv 1 \pmod{13}$ lub $a^6 \equiv -1 \pmod{13}$. Oznacza to, że dla dowolnego $a \in \mathbb{Z}$ mamy $a^6 \pmod{13} \in \{0, 1, -1\}$.

W konsekwencji, dla dowolnych całkowitych x, y i z mamy

$$x^6 + y^6 + z^6 \pmod{13} \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}.$$

Do ostatniego zbioru nie należy jednak 6, co powoduje sprzeczność i kończy dowód.

Zmienne losowe

Przykład 41. W pudełku znajduje się sześć zielonych i cztery czarne kule. Losujemy po jednej kuli (ze zwracaniem) aż do momentu wylosowania zielonej. Jeżeli zdarzy się to za n -tym razem i n jest liczbą nieparzystą, to wygrywamy 2^n złotych, jeśli zaś n jest liczbą parzystą, to przegrywamy 2^n złotych. Podaj rozkład zmiennej losowej opisującej naszą wygraną/przegraną oraz oblicz wartość oczekiwaną.

Rozwiązanie: Niech X oznacza wielkość wygranej/przegranej. Rozkład zmiennej losowej X możemy zapisać w nieskończonej tabeli:

x_i	2	-4	8	-16	32	-64	...
p_i	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5}$	$(\frac{2}{5})^2 \cdot \frac{3}{5}$	$(\frac{2}{5})^3 \cdot \frac{3}{5}$	$(\frac{2}{5})^4 \cdot \frac{3}{5}$	$(\frac{2}{5})^5 \cdot \frac{3}{5}$...

Ogólnie, zmienna X przyjmuje wartości 2^{2k-1} oraz -2^{2k} , $k \in \mathbb{N}$ z prawdopodobieństwami

$$P(X = 2^{2k-1}) = \frac{3}{5} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{2k-2},$$

$$P(X = -2^{2k}) = \frac{3}{5} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{2k-1}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Policzmy jeszcze wartość oczekiwaną X :

$$\begin{aligned} EX &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[2^{2k-1} \cdot \frac{3}{5} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{2k-2} - 2^{2k} \cdot \frac{3}{5} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{2k-1} \right] \\ &= \frac{3}{5} \sum_{k=1}^{\infty} \left[2^{2k-1} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{2k-2} - 2^{2k} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{2k-1} \right] \\ &= \frac{3}{5} \sum_{k=1}^{\infty} \left[2^{2k-1} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{2k-1} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{-1} - 2^{2k} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{2k} \left(\frac{2}{5}\right)^{-1} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} EX &= \frac{3}{5} \left(\frac{2}{5}\right)^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(\frac{4}{5}\right)^{2k-1} - \left(\frac{4}{5}\right)^{2k} \right] \\ &= \frac{3}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{4}{5}\right)^n \\ &= \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{5} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}. \end{aligned}$$

Wykorzystując wzór na sumę szeregu geometrycznego

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = \frac{a}{1-q},$$

dostajemy

$$EX = \frac{6}{5} \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{4}{5}\right)^{n-1} = \frac{6}{5} \cdot \frac{1}{1 + \frac{4}{5}} = \frac{6}{5} \cdot \frac{5}{9} = \frac{2}{3}.$$

Przykład 42. Dla jakiego $a \in \mathbb{R}$ funkcja f dana wzorem

$$f(x) = \begin{cases} a(1 - |x|), & \text{gdy } x \in [-1, 1], \\ 0, & \text{gdy } x \notin [-1, 1]. \end{cases}$$

jest gęstością prawdopodobieństwa pewnej zmiennej losowej X ? Podaj wzór na dystrybuantę dystrybuantę X , narysuj jej wykres, oblicz EX i $Var X$.

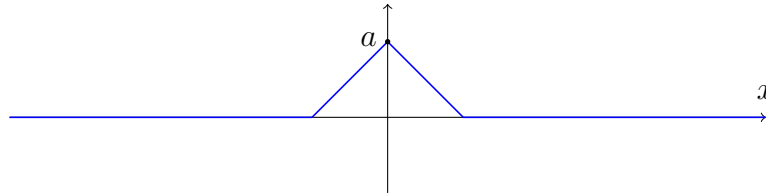
Rozwiązanie: Aby obliczyć wartość a , sprawdzamy kiedy zachodzi równość $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx =$

1. Obliczmy

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx &= \int_{-1}^1 a(1 - |x|) dx = a \int_{-1}^0 (1 + x) dx + a \int_0^1 (1 - x) dx \\ &= a \left(x + \frac{x^2}{2}\right) \Big|_{-1}^0 + a \left(x - \frac{x^2}{2}\right) \Big|_0^1 = a \left(1 - \frac{1}{2}\right) + a \left(1 - \frac{1}{2}\right) = a. \end{aligned}$$

Wobec tego a musi być równe 1.

Wartość a możemy też znaleźć bez liczenia całek. Zauważmy, że wykres funkcji f leżący ponad osią x , tworzy trójkąt o podstawie równej 2 i wysokości a , $a > 0$. Wobec tego jego pole jest równe $\frac{1}{2}2a = a$, a więc jest ono równe 1, gdy $a = 1$.



Rysunek 1. Wykres funkcji f gdy $a > 0$.

Obliczmy dystrybuantę zmiennej losowej X . Przypomnijmy, że jest ona dana wzorem

$F(t) = \int_{-\infty}^t f(x) dx$, $t \in \mathbb{R}$. Gdy $t < -1$, mamy

$$F(t) = \int_{-\infty}^t 0 dx = 0.$$

Gdy $-1 \leq t < 0$, mamy

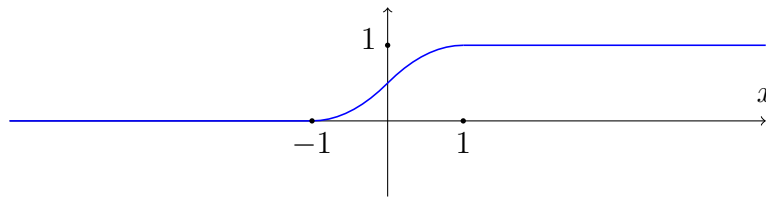
$$F(t) = \int_{-\infty}^{-1} 0 dx + \int_{-1}^t (1+x) dx = \left(x + \frac{x^2}{2}\right) \Big|_{-1}^t = t + \frac{t^2}{2} + 1 - \frac{1}{2}t = \frac{t^2}{2} + t + \frac{1}{2}.$$

Gdy $0 \leq t < 1$, mamy

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_{-\infty}^{-1} 0 dx + \int_{-1}^0 (1+x) dx + \int_0^t (1-x) dx = \left(x + \frac{x^2}{2}\right) \Big|_{-1}^0 + \left(x - \frac{x^2}{2}\right) \Big|_0^t \\ &= 1 - \frac{1}{2} + t - \frac{t^2}{2} = -\frac{t^2}{2} + t + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Gdy $t \geq 1$, mamy

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_{-\infty}^{-1} 0 dx + \int_{-1}^0 (1+x) dx + \int_0^1 (1-x) dx + \int_1^t 0 dx \\ &= \left(x + \frac{x^2}{2}\right) \Big|_{-1}^0 + \left(x - \frac{x^2}{2}\right) \Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2} = 1. \end{aligned}$$



Rysunek 2. Wykres dystrybuanty.

Obliczmy teraz wartość oczekiwaną. Przypomnijmy, że $EX = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$. Ponieważ funkcja f jest parzysta, otrzymujemy

$$EX = \int_{-1}^0 x(1 - |x|) dx + \int_0^1 x(1 - |x|) dx = \int_0^1 -x(1 - |x|) dx + \int_0^1 x(1 - |x|) dx = 0.$$

Do obliczenia wariancji zmiennej losowej X wykorzystamy wzór $Var X = E(X^2) - (EX)^2$.

Obliczmy

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_{-1}^0 x^2(1 - |x|) dx + \int_0^1 x^2(1 - |x|) dx = \int_0^1 x^2(1 - |x|) dx + \int_0^1 x^2(1 - |x|) dx \\ &= 2 \int_0^1 x^2(1 - x) dx = 2 \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^1 = 2 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Zatem $Var X = \frac{1}{6} - 0 = \frac{1}{6}$.

Przykład 43. Wiemy, że zmienna losowa X przyjmuje jedynie wartości 1, 2 i 3. Ponadto $P(X \geq 2) = \frac{3}{5}$ oraz $P(X = 3 | X \geq 2) = \frac{1}{3}$. Podaj wzór na dystrybuantę X i narysuj jej wykres.

Rozwiązanie: Oznaczmy $p_1 = P(X = 1)$, $p_2 = P(X = 2)$ oraz $p_3 = P(X = 3)$. Z treści zadania wiemy, że $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ oraz

$$\frac{3}{5} = P(X \geq 2) = P(\sim (X = 1)) = 1 - p_1 \quad \implies \quad p_1 = \frac{2}{5}.$$

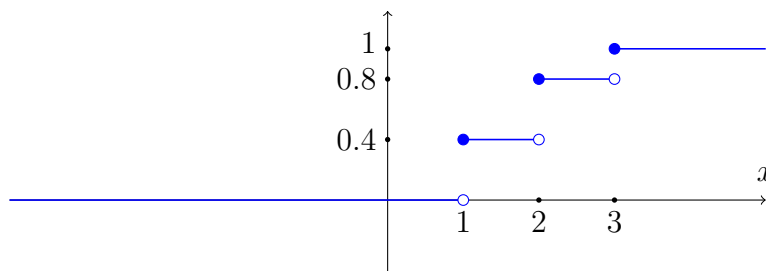
Wobec tego $p_2 + p_3 = \frac{3}{5}$. Ponadto

$$\frac{1}{3} = P(X = 3 | X \geq 2) = \frac{P(X = 3 \wedge X \geq 2)}{P(X \geq 2)} = \frac{P(X = 3)}{P(X \geq 2)} = \frac{p_3}{p_2 + p_3} = \frac{p_3}{\frac{3}{5}} = \frac{5}{3}p_3.$$

Zatem $p_3 = \frac{1}{5}$ i $p_2 = \frac{2}{5}$, więc dystrybuanta zmiennej losowej X jest dana wzorem

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } x < 1, \\ \frac{2}{5}, & \text{gdy } 1 \leq x < 2, \\ \frac{4}{5}, & \text{gdy } 2 \leq x < 3, \\ 1, & \text{gdy } x \geq 3, \end{cases}$$

a jej wykres wygląda następująco:



Rysunek 3. Wykres dystrybuanty.

Przykład 44. Poniższa tabela przedstawia łączny rozkład zmiennych losowych X i Y :

$X \setminus Y$	0	1
0	$\frac{2}{9}$	a
1	b	$\frac{2}{9}$

- Znajdź wszystkie wartości parametrów a i b , dla których zmienne X i Y są niezależne,
- Znajdź wszystkie wartości parametrów a i b , dla których zmienne X i Y są nieskorelowane.

Rozwiązanie: Zaczniemy od tego, że a i b muszą być liczbami nieujemnymi i ich suma musi być równa $\frac{5}{9}$. Dodajmy do tabeli z rozkładem wektora (X, Y) rozkłady brzegowe:

$X \setminus Y$	0	1	$P(X = x_i)$
0	$\frac{2}{9}$	a	$\frac{2}{9} + a$
1	b	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9} + b$
$P(Y = y_i)$	$\frac{2}{9} + b$	$\frac{2}{9} + a$	

a) Zmienne losowe X i Y są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy $a + b = \frac{5}{9}$ oraz

$$P(X = 0)P(Y = 0) = P(X = 0 \wedge Y = 0) \iff \left(\frac{2}{9} + a\right)\left(\frac{2}{9} + b\right) = \frac{2}{9},$$

$$P(X = 0)P(Y = 1) = P(X = 0 \wedge Y = 1) \iff \left(\frac{2}{9} + a\right)\left(\frac{2}{9} + a\right) = a,$$

$$P(X = 1)P(Y = 0) = P(X = 1 \wedge Y = 0) \iff \left(\frac{2}{9} + b\right)\left(\frac{2}{9} + b\right) = b,$$

$$P(X = 1)P(Y = 1) = P(X = 1 \wedge Y = 1) \iff \left(\frac{2}{9} + b\right)\left(\frac{2}{9} + a\right) = \frac{2}{9}.$$

Musimy więc znaleźć wartości a i b dla których

$$a + b = \frac{5}{9} \wedge \left(\frac{2}{9} + a\right)\left(\frac{2}{9} + b\right) = \frac{2}{9} \wedge \left(\frac{2}{9} + a\right)^2 = a \wedge \left(\frac{2}{9} + b\right)^2 = b,$$

a więc

$$(i) \ a + b = \frac{5}{9} \wedge (ii) \ \left(\frac{2}{9} + a\right)\left(\frac{2}{9} + b\right) = \frac{2}{9}$$

$$\wedge (iii) \ a^2 - \frac{5}{9}a + \frac{4}{81} = 0 \wedge (iv) \ b^2 - \frac{5}{9}b + \frac{4}{81} = 0.$$

Równanie kwadratowe $x^2 - \frac{5}{9}x + \frac{4}{81} = 0$ ma dwa rozwiązania $x_1 = \frac{1}{9}$ i $x_2 = \frac{4}{9}$. Wobec tego z równań (iii) i (iv) wynika, że $a = \frac{1}{9}$ i $b = \frac{1}{9}$ lub $a = \frac{4}{9}$ i $b = \frac{4}{9}$ lub $a = \frac{1}{9}$ i $b = \frac{4}{9}$ lub $a = \frac{4}{9}$ i $b = \frac{1}{9}$. Zauważmy teraz, że równanie (i) jest spełnione tylko, gdy $a = \frac{1}{9}$ i $b = \frac{4}{9}$ lub $a = \frac{4}{9}$ i $b = \frac{1}{9}$. Na koniec sprawdzamy, że obie te pary spełniają warunek (ii). Podsumowując, zmienne losowe X i Y są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy $a = \frac{1}{9}$ i $b = \frac{4}{9}$ albo $a = \frac{4}{9}$ i $b = \frac{1}{9}$.

b) Przypomnijmy, że zmienne losowe X i Y są nieskorelowane, gdy $E(XY) = EX \cdot EY$.

Wykorzystując rozkłady brzegowe wyliczamy

$$EX = 0\left(\frac{2}{9} + a\right) + 1\left(\frac{2}{9} + b\right) = \frac{2}{9} + b,$$

$$EY = 0\left(\frac{2}{9} + b\right) + 1\left(\frac{2}{9} + a\right) = \frac{2}{9} + a,$$

$$EXY = 0 \cdot \frac{2}{9} + 0 \cdot b + 0 \cdot a + 1 \cdot 1 \cdot \frac{2}{9} = \frac{2}{9}.$$

Musimy więc znaleźć wartości a i b dla których

$$a + b = \frac{5}{9} \quad \wedge \quad \left(\frac{2}{9} + a\right)\left(\frac{2}{9} + b\right) = \frac{2}{9}.$$

Podstawiając $b = \frac{5}{9} - a$ do drugiego równania otrzymujemy równanie kwadratowe

$$\left(b + \frac{2}{9}\right)\left(\frac{7}{9} - b\right) = \frac{2}{9} \quad \iff \quad b = \frac{1}{9} \vee b = \frac{4}{9}.$$

Wobec tego zmienne losowe X i Y są nieskorelowane wtedy i tylko wtedy, gdy $a = \frac{1}{9}$ i $b = \frac{4}{9}$ albo $a = \frac{4}{9}$ i $b = \frac{1}{9}$.

Zatem zmienne losowe z tego zadania są niezależne dokładnie wtedy, gdy są nieskorelowane.

Uwaga! Tak nie musi być zawsze, ponieważ istnieją nieskorelowane zmienne losowe, które są zależne.

Przykład 45. Poniższa tabela przedstawia łączny rozkład zmiennych losowych X i Y :

$X \backslash Y$	-1	0	1	2
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0
1	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$

Znajdź ich kowariancję, współczynnik korelacji, krzywą regresji drugiego rodzaju oraz prostą regresji drugiego rodzaju Y względem X .

Rozwiązanie: Dodajmy do tabeli z rozkładem wektora (X, Y) rozkłady brzegowe

$X \setminus Y$	-1	0	1	2	$P(X = x_i)$
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{2}$
1	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
$P(Y = y_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	

Możemy teraz obliczyć

$$EX = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

$$EY = -1 \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$

$$E(X^2) = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

$$E(Y^2) = 1 \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{2},$$

$$EXY = 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

i dalej

$$\text{Var}X = E(X^2) - (EX)^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4},$$

$$\text{Var}Y = E(Y^2) - (EY)^2 = \frac{3}{2} - \frac{1}{4} = \frac{5}{4},$$

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - EX \cdot EY = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4},$$

$$\rho = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}X \cdot \text{Var}Y}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Możemy już podać wzór na prostą regresji drugiego rodzaju

$$y = \rho \frac{\sqrt{\text{Var}Y}}{\sqrt{\text{Var}X}} (x - EX) + EY = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot (x - \frac{1}{2}) + \frac{1}{2} = x.$$

Aby znaleźć krzywą regresji pierwszego rodzaju, obliczamy

$$g(0) = E(Y|X = 0) = \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = 0,$$
$$g(1) = 1 = E(Y|X = 1) = \frac{0 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = 1.$$

Oznacza to, że $E(Y|X) = X$ oraz $g(x) = x$. Zatem w tym przypadku oba rodzaje regresji dają ten sam wynik.

Przykład 46. Zmienna losowa X ma gęstość daną wzorem

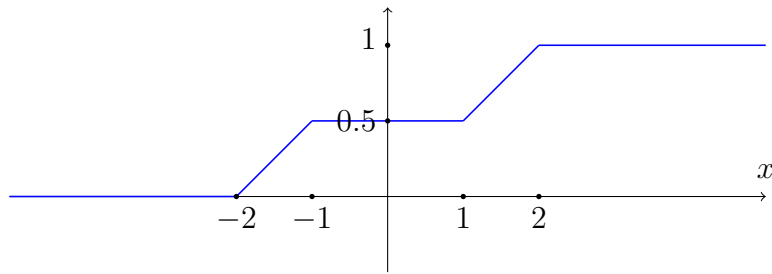
$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{gdy } x \in [-2, 1] \cup [1, 2], \\ 0, & \text{gdy } x \notin [-2, 1] \cup [1, 2]. \end{cases}$$

Znajdź gęstość zmiennej $Y = X^2 - 1$.

Rozwiązanie: Dystrubuantą zmiennej losowej X jest dana wzorem

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } x < -2, \\ \frac{1}{2}(x+2), & \text{gdy } -2 \leq x < -1, \\ \frac{1}{2}, & \text{gdy } -1 \leq x < 1, \\ \frac{1}{2}x, & \text{gdy } 1 \leq x < 2, \\ 1, & \text{gdy } x \geq 2, \end{cases}$$

Zmienna losowa X przyjmuje tylko wartości z przedziałów $[-2, -1]$ i $[1, 2]$, więc X^2 ma wartości w przedziale $[1, 4]$, a Y — w przedziale $[0, 3]$. Oznacza to, że $F_Y(t) = 0$ dla

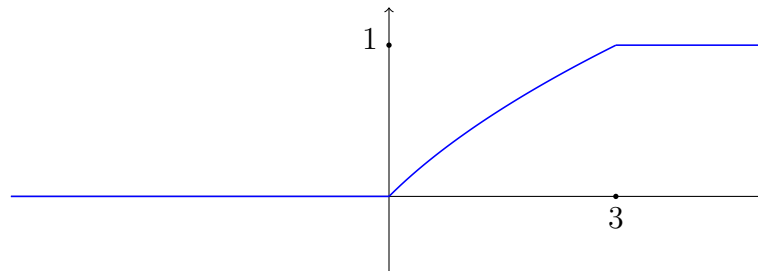


Rysunek 4. Wykres dystrybuanty zmiennej losowej X .

$t < 0$ oraz $F_Y(t) = 1$ dla $t > 3$. Natomiast dla $t \in [0, 3]$ mamy

$$\begin{aligned} F_Y(t) &= P(Y \leq t) = P(X^2 - 1 \leq t) = P(X^2 \leq t + 1) = P(\sqrt{t+1} \leq X \leq \sqrt{t+1}) \\ &= F_X(\sqrt{t+1}) - F_X(-\sqrt{t+1}) = \frac{1}{2}\sqrt{t+1} - \frac{1}{2}(-\sqrt{t+1} + 2) = \sqrt{t+1} - 1, \end{aligned}$$

ponieważ wtedy $\sqrt{t+1} \in [1, 2]$ i $-\sqrt{t+1} \in [-1, -2]$.



Rysunek 5. Wykres dystrybuanty zmiennej losowej Y .

Ostatecznie, $f_Y(t) = F'_Y(t) = \frac{1}{2\sqrt{t+1}}$ dla $t \in [0, 3]$ oraz $f_Y(t) = F'_Y(t) = 0$ dla $t \notin [0, 3]$.