

**MATERIAŁY DYDAKTYCZNE**  
do dodatkowych zajęć wyrównawczych z przedmiotu  
**MATEMATYKA**  
dla studentów kierunku/kierunków  
**INFORMATYKA**

**Opracował zespół w składzie:**

Adam Gregosiewicz

Artur Kukuryka

Ernest Nieznaj

Elżbieta Ratajczyk

**Lublin 2024 r.**

## 1. Wzór i szereg Taylora

Zadania w tej części dotyczą rozwijania funkcji w szereg potęgowy. Punktem wyjścia jest tutaj wzór Taylora. Mianowicie, jeśli funkcja  $f(x)$ , określona w przedziale  $(a, b)$ , posiada pochodne do rzędu  $n$ , to można ją zapisać w postaci

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_n(x), \quad (1)$$

gdzie  $x_0 \in (a, b)$  jest ustalonym punktem, natomiast  $R_n(x)$  jest resztą. Innymi słowy,  $f(x)$  można zapisać w postaci sumy wielomianu i pewnej reszty. Najczęściej spotykaną jej formą jest reszta Lagrange'a, która określona jest wzorem

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x - x_0)^n.$$

Wzór Taylora należy rozumieć następująco: dla każdego  $x \in (a, b)$  istnieje taka liczba  $c$ , należąca do przedziału  $(x_0, x)$  (gdy  $x > x_0$ ) lub  $(x, x_0)$  (jeśli  $x < x_0$ ), że ma miejsce równość (1). Zatem  $c$ , przy ustalonym  $n$ , zależy w ogólności od  $x$ . W kilku przypadkach wykorzystamy resztę w postaci Cauchy'ego. Ma ona postać

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n-1)!} (1 - \theta)^{n-1} (x - x_0)^n, \quad (2)$$

gdzie  $\theta \in (0, 1)$ . Tak jak w przypadku  $c$ , parametr  $\theta$  zależy ogólnie od  $x$ .

Najbardziej interesująca jest sytuacja, w której reszta jest mała. Pozwala to przybliżyć rozważaną funkcję, zwykle nie będącą wielomianem, za pomocą wielomianu. Ponadto, jeśli  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ , to  $f$  można przedstawić w postaci sumy nieskończonej

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k, \quad (3)$$

nazywanej szeregiem Taylora. W zastosowaniach najczęściej przyjmuje się  $x_0 = 0$ . Wówczas (1) nazywa się wzorem Maclaurina, a (3) szeregiem Maclaurina. We wszystkich poniższych zadaniach zakładamy więc, że  $x_0 = 0$ , a odpowiedni wzór i szereg nazywamy wzorem i szeregiem Taylora.

**Zadanie 1.1.** Napisać wzór i szereg Taylora dla funkcji  $f(x) = \frac{1}{1-x}$ .

**Rozwiązanie.** Funkcję zapisujemy w wygodniejszej do różniczkowania postaci  $(1-x)^{-1}$ .

Pierwszy trzy pochodne są więc równe

$$f'(x) = (-1)(1-x)^{-2}(-1) = (1-x)^{-2}$$

$$f''(x) = (-2)(1-x)^{-3}(-1) = 2(1-x)^{-3}$$

$$f'''(x) = 2(-3)(1-x)^{-4}(-1) = 2 \cdot 3(1-x)^{-4}$$

Zatem wzór ogólny na pochodną rzędu  $k$  rozważanej funkcji ma postać

$$f^{(k)}(x) = k!(1-x)^{-(k+1)} = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}, \quad k \geq 1.$$

Stąd  $f^{(k)}(0) = k!$  i dla dowolnego  $n \geq 2$  mamy

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{n-1} + \frac{x^n}{(1-x)^{n+1}}. \quad (4)$$

Powyższy wzór jest prawdziwy w pewnym otoczeniu  $x_0 = 0$ , tzn. tam gdzie istnieją pochodne  $f$  do rzędu  $n$ . Ponieważ dla  $x = 1$  funkcja nie jest określona, to otoczenie to nie może zawierać 1. Jeśli w poniższym, znanym wzorze na sumę elementów w skończonym ciągu geometrycznym

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}, \quad x \neq 1, \quad n \geq 1,$$

przejdziemy do granicy z  $n \rightarrow +\infty$ , to dla  $|x| < 1$  otrzymamy

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \quad (5)$$

ponieważ  $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$ , dla  $x \in (-1, 1)$ . Dowodzi to, że reszta w (4) dąży do zera w tym przedziale. Jednak z jej postaci, tzn. z postaci Cauchy'ego, nie można tego wywnioskować. Aby to pokazać użyjemy reszty Cauchy'ego, patrz (2). Reszta ta w naszym przypadku jest równa

$$R_n(x) = \frac{n!}{(1-\theta x)^{n+1}} \cdot \frac{(1-\theta)^{n-1} x^n}{(n-1)!} = n \left( \frac{x(1-\theta)}{1-\theta x} \right)^{n-1} \cdot \frac{x}{(1-\theta x)^2},$$

gdzie  $\theta \in (0, 1)$ . Rozpatrzmy dwa przypadki. W pierwszym, jeśli  $x \in (0, 1)$ , to również  $1 - \theta x \in (0, 1)$ . Wówczas

$$\frac{x(1-\theta)}{1-\theta x} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad x - x\theta < 1 - \theta x \quad \Leftrightarrow \quad x < 1.$$

Dla  $x \in (-1, 0)$  mamy natomiast  $1 - \theta x > 1$ , i stąd wynika nierówność

$$\left| \frac{x(1-\theta)}{1-\theta x} \right| < |x|.$$

Ostatecznie prawdziwe jest oszacowanie

$$|R_n(x)| \leq C \cdot n \cdot q^{n-1}, \quad x \in (-1, 1),$$

gdzie  $C$  i  $q$  są nieujemnymi stałymi zależnymi tylko od  $x$ . Ponadto,  $q \in \langle 0, 1 \rangle$ .

Wykorzystamy teraz kryterium Cauchy'ego zbieżności szeregu liczbowego

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = r < 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty,$$

a więc także  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ . Dla ustalonego  $x$  mamy

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|R_n(x)|} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{C \cdot n \cdot q^{n-1}} = q < 1,$$

zatem  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ . W obliczeniu powyższej granicy wykorzystaliśmy fakt, że  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{C} = 1$ , dla dowolnego  $C > 0$ , oraz  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ .

**Zadanie 1.2.** Na podstawie zadania 1.1 napisać szeregi Taylora dla następujących funkcji

$$\text{a) } f(x) = \frac{1}{1-2x} \quad \text{b) } g(x) = \frac{1}{1-x^2} \quad \text{c) } h(x) = \frac{4x+3}{3x+2}.$$

**Rozwiązanie.** a) Do wzoru (5) wstawiamy  $2x$  w miejsce  $x$  i otrzymujemy

$$\frac{1}{1-2x} = \sum_{k=0}^{+\infty} (2x)^k = 1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + \dots$$

Zauważmy jednak, że musi być spełniony warunek  $|2x| < 1$ . Zatem powyższy wzór jest prawdziwy, jeśli  $|x| < \frac{1}{2}$ , czyli gdy  $x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ .

b) Rozwinięcie Taylora dla  $g$  można otrzymać podobnie jak dla  $f$ , czyli podstawiając  $x^2$  w miejsce  $x$  we wzorze (5). Zatem

$$\frac{1}{1-x^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^{2k} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots$$

Dla  $x \in (-1, 1)$  mamy  $x^2 \in \langle 0, 1 \rangle$ , zatem powyższy wzór jest słuszny dla każdego  $x$  z przedziału  $(-1, 1)$ . Drugi sposób jest następujący. Zauważmy najpierw, że

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} \right).$$

Następnie, zapiszmy wzór (5) jeszcze raz dla  $x$  i  $-x$  (jeśli  $|x| < 1$ , to również  $|-x| < 1$ )

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + \dots \\ \frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 - \dots \end{aligned}$$

Jeśli powyższe równości dodamy, to nieparzyste potęgi się zniósą. Zatem

$$\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} = 2(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots),$$

i dzieląc ostatnią równość przez 2 dostajemy to samo, co wcześniej.

c) Funkcja  $h$  to funkcja homograficzna, którą zapisujemy następująco

$$\frac{4x+3}{3x+2} = \frac{\frac{4}{3}(3x+2) + \frac{1}{3}}{3x+2} = \frac{4}{3} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1 + \frac{3}{2}x}.$$

Korzystając jeszcze raz z (5) otrzymujemy

$$\frac{4x+3}{3x+2} = \frac{4}{3} + \frac{1}{6} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{3}{2}x\right)^k,$$

jeśli  $|\frac{3}{2}x| < 1$ . Powyższy wzór zachodzi więc dla  $x \in (-\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ .

**Zadanie 1.3.** Na podstawie zadania 1.1 napisać szeregi Taylora dla funkcji

$$\text{a) } f(x) = \frac{1}{(1-x)^2} \quad \text{b) } g(x) = \frac{1}{(1-x)^3}.$$

**Rozwiązanie.** a) Wykorzystamy następujące twierdzenie o różniczkowaniu szeregu potęgowego. Mianowicie, jeśli funkcję  $f$ , określoną w pewnym przedziale, można przedstawić w postaci szeregu

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k, \quad x \in (a, b), \quad (6)$$

gdzie  $a_0, a_1, a_2, \dots$  są stałymi, to wówczas także  $f'(x)$  można zapisać w postaci szeregu oraz ma miejsce równość

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x-x_0)^{k-1}, \quad x \in (a, b).$$

Innymi słowy, prawą stronę w (6) można różniczkować wyraz po wyrazie. Obliczamy pochodne obu stron w (5). Pochodna  $(1-x)^{-1}$  wynosi  $(1-x)^{-2}$ , zatem

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} k x^{k-1} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots \quad (7)$$

b) Różniczkujemy stronami równość (7). Pochodna  $(1-x)^{-2}$  wynosi  $2(1-x)^{-3}$ , stąd

$$\frac{1}{(1-x)^3} = \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)x^{k-2} = \frac{1}{2}(2 + 3 \cdot 2x + 4 \cdot 3x^2 + 5 \cdot 4x^3 + \dots) \quad (8)$$

Oba powyższe szeregi są zbieżne dla  $x \in (-1, 1)$ . Zapiszemy je wykorzystując symbol Newtona. Jeśli  $n$  i  $k$  są liczbami naturalnymi, to symbol ten definiuje się jako

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad k \leq n.$$

Przypomnijmy, że  $0! = 1$ . Na przykład

$$\binom{0}{0} = \frac{0!}{0!0!} = 1, \quad \binom{4}{0} = \frac{4!}{0!4!} = 1, \quad \binom{4}{2} = \frac{4!}{2!2!} = 6.$$

Dla  $k \geq 1$  i  $k \geq 2$  mamy odpowiednio

$$\binom{k}{1} = \frac{k!}{(k-1)!} = k, \quad \binom{k}{2} = \frac{k!}{2!(k-2)!} = \frac{1}{2}k(k-1).$$

Wzory (7) i (8) przybierają więc postać

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \binom{k}{1} x^{k-1}, \quad \frac{1}{(1-x)^3} = \sum_{k=2}^{\infty} \binom{k}{2} x^{k-2}.$$

Powyższe funkcje są szczególnym przypadkiem funkcji  $(1-x)^\alpha$ , gdzie  $\alpha \in \mathbb{R}$ , patrz także zadanie 1.10. W zadaniu tym uogólnimy również pojęcie symbolu Newtona.

**Zadanie 1.4.** Napisać wzór i szereg Taylora dla funkcji  $f(x) = e^x$ .

**Rozwiązanie.** W tym przypadku  $f'(x) = e^x$ , a więc również  $f^{(k)}(x) = e^x$ , dla każdego  $k \geq 1$ . Zatem  $f^{(k)}(0) = 1$ , dla  $k \geq 1$ , i stąd otrzymujemy

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{e^c}{n!} x^n, \quad (9)$$

Okazuje się, że reszta w (9) zbiega do zera, gdy  $n \rightarrow \infty$ , dla każdego  $x \in \mathbb{R}$ . Aby to pokazać, wykorzystamy kryterium d'Alemberta zbieżności szeregu liczbowego. Mianowicie, zachodzi implikacja

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = r < 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty.$$

Szereg zbieżny spełnia warunek konieczny, czyli  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ . Dla reszty we wzorze (9), przy ustalonym  $x$ , mamy

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{R_{n+1}(x)}{R_n(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{e^c x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{e^c x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0.$$

Stąd  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ , dla każdego  $x \in \mathbb{R}$ , a więc

$$e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad (10)$$

**Zadanie 1.5.** Napisać szereg Taylora dla funkcji:  $\sinh x$ ,  $\cosh x$ ,  $\sinh^2 x$ ,  $\cosh^2 x$ .

**Rozwiązanie.** Zgodnie z definicją funkcji hiperbolicznych mamy

$$\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Wynika stąd w szczególności, że  $\sinh x$  jest funkcją nieparzystą, a  $\cosh x$  parzystą. Ponadto,  $\cosh x \geq 1$ , przy dowolnym  $x$ . Zapisujemy wzór (10) dla  $x$  i  $-x$

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \dots \\ e^{-x} &= 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} - \dots \end{aligned}$$

Odejmując i dodając powyższe równości, oraz dzieląc przez 2, otrzymujemy

$$\sinh x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots \quad (11)$$

oraz

$$\cosh x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots \quad (12)$$

Zauważmy, że w rozwinięciu (11) występują tylko nieparzyste, a w rozwinięciu (12) tylko parzyste potęgi  $x$ . Rozwinięcia dla funkcji  $\sinh^2 x$  i  $\cosh^2 x$  uzyskamy wykorzystując tożsamości

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1, \quad \cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x. \quad (13)$$

Dla dowodu pierwszej, zauważmy, że

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = 1.$$

Podobnie dowodzimy drugiej

$$\cosh^2 x + \sinh^2 x = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} = \cosh 2x.$$

Następnie, z (13) mamy

$$\sinh^2 x = \frac{-1 + \cosh 2x}{2}, \quad \cosh^2 x = \frac{1 + \cosh 2x}{2}.$$

Podstawiając  $2x$  w miejsce  $x$  we wzorze (12) otrzymujemy rozwinięcie

$$\sinh^2 x = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(2x)^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^{2k-1} x^{2k}}{(2k)!} = \frac{2x^2}{2!} + \frac{2^3 x^4}{4!} + \frac{2^5 x^6}{6!} + \dots$$

oraz

$$\cosh^2 x = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^{2k-1} x^{2k}}{(2k)!} = 1 + \frac{2x^2}{2!} + \frac{2^3 x^4}{4!} + \frac{2^5 x^6}{6!} + \dots$$

**Zadanie 1.6.** Napisać szereg Taylora dla funkcji:  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\sin^2 x$ ,  $\cos^2 x$ .

**Rozwiązanie.** Pierwsze cztery pochodne  $\sin x$  równe są

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (\sin x)'' = -\sin x, \quad (\sin x)''' = -\cos x, \quad (\sin x)^{iv} = \sin x,$$

a więc kolejne pochodne powtarzają się cyklicznie. Podobnie jest z funkcją  $\cos x$ , dla której

$$(\cos x)' = -\sin x, \quad (\cos x)'' = -\cos x, \quad (\cos x)''' = \sin x, \quad (\cos x)^{iv} = \cos x.$$

Wzory ogólne na pochodną rzędu  $n$  można zapisać w postaci

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right), \quad (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right), \quad n \geq 0,$$

gdzie zerowa pochodna oznacza wyjściową funkcję. Zauważmy teraz, że ponieważ  $\sin(k\pi) = 0$ , dla każdego  $k \in \mathbb{Z}$ , to  $n$ -tą pochodną tej funkcji w punkcie  $x = 0$  możemy zapisać następująco

$$(\sin x)_{x=0}^{(n)} = \sin\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ (-1)^k, & n = 2k + 1. \end{cases}$$

Podobnie jest dla kosinusa, tzn. ponieważ  $\cos(k\pi + \frac{\pi}{2}) = 0$ , dla każdego  $k \in \mathbb{Z}$ , to

$$(\cos x)_{x=0}^{(n)} = \cos\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0, & n = 2k + 1, \\ (-1)^k, & n = 2k. \end{cases}$$

Zatem

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{\sin\left(c + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)}{n!} x^n$$

oraz

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{\cos\left(c + k \cdot \frac{\pi}{2}\right)}{n!} x^n.$$

Reszty w powyższych wzorach mają podobną postać jak w (9) i ich zbieżność do zera, dla każdego  $x \in \mathbb{R}$ , wynika np. z kryterium d'Alemberta. Stąd

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \quad (14)$$

oraz

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \quad (15)$$

Podobnie jak w zadaniu 1.5 zauważmy, że w rozwinięciu  $\sin x$  występują tylko nieparzyste potęgi  $x$ , a w rozwinięciu  $\cos x$  tylko parzyste. Wynika stąd m.in., że sinus jest funkcją nieparzystą, a kosinus funkcją parzystą. Aby napisać szeregi dla  $\sin^2 x$  i  $\cos^2 x$  wykorzystamy znane tożsamości trygonometryczne

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x,$$

z których dostajemy

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}.$$

Podstawiając  $2x$  w (15) mamy

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} \left( 1 - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{(2x)^{2k}}{(2k)!} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \cdot \frac{2^{2k-1} x^{2k}}{(2k)!}$$

oraz

$$\cos^2 x = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{2^{2k-1} x^{2k}}{(2k)!}.$$

**Zadanie 1.7.** Używając rozwinięć (14) i (15) napisać szeregi Taylora dla funkcji:  $\sin x \cos x$ ,  $\sin x \sin 2x$ .

**Rozwiązanie.** Podobnie jak w poprzednim zadaniu, wykorzystamy pewne znane tożsamości trygonometryczne. W pierwszym przypadku, z równości  $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$  mamy  $\sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}$ , zatem z (14) dostajemy

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{(2x)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{2^{2k} x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Następnie, z równości

$$\sin a \sin b = \frac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{2}$$

otrzymujemy

$$\sin 2 \sin 2x = \frac{\cos x - \cos 3x}{2}.$$

Na podstawie (15) mamy więc

$$\sin x \sin 2x = \frac{1}{2} \left( \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k}}{(2k)!} - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{(3x)^{2k}}{(2k)!} \right) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (1 - 3^{2k}) \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

**Zadanie 1.8.** Napisać wzór i szereg Taylora dla funkcji  $f(x) = \ln(1+x)$ .

**Rozwiązanie.** Funkcja ta określona jest w przedziale  $(-1, +\infty)$  i jej pierwsza pochodna równa jest  $(1+x)^{-1}$ . Następnie obliczamy

$$f''(x) = -1(1+x)^{-2}, \quad f'''(x) = 1 \cdot 2(1+x)^{-3}, \quad f^{iv}(x) = -1 \cdot 2 \cdot 3(1+x)^{-4}.$$

Wynika stąd, że wzór ogólny na pochodną rzędu  $k$  ma postać

$$f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}(k-1)!(1+x)^{-k} = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}, \quad k \geq 1.$$

Stąd  $f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)!$  i wzór Taylora w otoczeniu zera wygląda następująco

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{(1+c)^n}.$$

Zauważmy, że dla  $x \in (0, 1)$  parametr  $c \in (0, x)$ . Stąd  $1+c \geq 1$ , i w tym przedziale

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |R_n(x)| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{x}{1+c} \right|^n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} |x|^n = 0.$$

Z tej postaci reszty nie wynika jednak, że zbiega ona do zera dla  $x \in (-1, 0)$ . Aby to wykazać użyjemy ponownie reszty Cauchy'ego, patrz (2), która jest równa

$$R_n(x) = (-1)^{n-1} \cdot \frac{(1-\theta)^{n-1} x^n}{(1+\theta x)^n}, \quad \theta \in (0, 1).$$

Dla  $x \in (-1, 0)$  zachodzą równoważności

$$0 \leq \frac{1-\theta}{1+\theta x} \leq 1 \Leftrightarrow 1-\theta \leq 1+\theta x \Leftrightarrow -1 \leq x.$$

Dla reszty Cauchy'ego prawdziwe jest więc oszacowanie

$$|R_n(x)| = \left| \frac{1-\theta}{1+\theta x} \right|^{n-1} \cdot \frac{|x|^n}{|1+\theta x|} \leq \frac{|x|^n}{1+x}, \quad x \in (-1, 0),$$

i stąd

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |R_n(x)| \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|x|^n}{1+x} = 0.$$

Zatem w przedziale  $(-1, 1)$  ma miejsce równość

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \cdot \frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad (16)$$

Można również wykazać, że powyższy wzór jest prawdziwy dla  $x = 1$ , tzn.

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots,$$

przy czym szereg ten jest zbieżny warunkowo, co oznacza, że

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots = +\infty.$$

Patrz także zadanie 1.12.

[www.viacarpatia.pro](http://www.viacarpatia.pro)

**Zadanie 1.9.** Na podstawie zadania 1.8 napisać szeregi Taylora dla funkcji

$$\text{a) } f(x) = \ln \frac{1}{(1-3x)^2} \quad \text{b) } g(x) = \ln \sqrt{1-x^2} \quad \text{c) } h(x) = \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right)$$

**Rozwiązanie.** a) Z własności logarytmu otrzymujemy

$$\ln \frac{1}{(1-3x)^2} = \ln(1-3x)^{-2} = -2 \ln(1-3x).$$

Jeśli więc  $|3x| < 1$ , czyli gdy  $x \in (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ , to prawdziwe jest rozwinięcie

$$\ln \frac{1}{(1-3x)^2} = -2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \cdot \frac{(-3x)^k}{k} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k x^k}{k}.$$

b) Analogicznie jak w punkcie a), na podstawie (16), mamy

$$\ln \sqrt{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln(1-x^2) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \cdot \frac{x^{2k}}{k!}$$

c) Zapisujemy wzór (16) dla  $x$  i  $-x$

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \\ \ln(1-x) &= -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots \end{aligned}$$

Powyższe wzory są słuszne w przedziale  $(-1, 1)$  i widać, że przy ich dodawaniu zniósą się potęgi nieparzyste, a przy odejmowaniu potęgi parzyste. Nasza funkcja jest równa ich różnicy, tzn.

$$h(x) = \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right) = \ln(1+x) - \ln(1-x).$$

Stąd mamy

$$\ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{2k+1} x^{2k+1} = 2x + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \frac{2x^7}{7} + \dots \quad (17)$$

**Uwaga.** Otrzymaliśmy ciekawy rezultat. Wzór (17) zachodzi oczywiście dla  $x \in (-1, 1)$ , ale w istocie jest to rozwinięcie funkcji logarytmicznej dla dowolnej liczby nieujemnej.

Aby to zobaczyć, podstawmy

$$t = \frac{1+x}{1-x} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{t-1}{t+1}.$$

Wynika stąd, że  $t \in (0, +\infty)$  i wówczas przepisujemy (17) jako

$$\ln t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{2k+1} \left( \frac{t-1}{t+1} \right)^{2k+1}.$$

Wracając do  $x$ , możemy więc napisać

$$\ln x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{2k+1} \left( \frac{x-1}{x+1} \right)^{2k+1}, \quad x \in (0, +\infty).$$

Dla niedużych wartości  $x$ , szereg ten jest stosunkowo szybko zbieżny i jest wykorzystywany w obliczeniach numerycznych dotyczących logarytmów. Na przykład, dla  $x = 2$

$$\ln 2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{2k+1} \left( \frac{1}{3} \right)^{2k+1} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot \left( \frac{1}{3} \right)^3 + \frac{2}{5} \cdot \left( \frac{1}{3} \right)^5 + \frac{2}{7} \cdot \left( \frac{1}{3} \right)^7 + \dots$$

**Zadanie 1.10.** Napisać wzór i szereg Taylora dla funkcji  $f(x) = (1+x)^\alpha$ , gdzie  $\alpha \neq 0$ .

**Rozwiązanie.** Wykładnik  $\alpha$  może być dowolną liczbą rzeczywistą. Zauważmy jednak, że dla  $\alpha \in \mathbb{N}$  funkcja ta jest wielomianem i stosowanie do niej wzoru Taylora jest wówczas w zasadzie bezcelowe. Dziedzina  $f$  zmienia się oczywiście wraz  $\alpha$ .

Natomiast, jeśli założymy, że  $x \in (-1, +\infty)$ , to funkcja ta jest dobrze określona dla każdego  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Wzór Taylora dla  $f$  ma więc zawsze sens w pewnym otoczeniu  $x_0 = 0$ . Obliczamy  $f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$  i następnie

$$f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}, \quad f'''(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(1+x)^{\alpha-3}.$$

Wzór na pochodną rzędu  $k$  jest więc następujący

$$f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-(k-1))(1+x)^{\alpha-k}, \quad k \geq 1.$$

W szczególności, dla  $x = 0$ , otrzymujemy

$$f^{(k)}(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-(k-1)), \quad k \geq 1.$$

W tym miejscu wygodnie jest wprowadzić oznaczenie na powyższy iloczyn. Zwykle wprowadza się najpierw uogólniony symbol Newtona

$$\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-(k-1))}{k!}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Dla  $k = 0$  przyjmuje się z definicji, że wartość ta wynosi 1. Przykładowo

$$\binom{\frac{1}{2}}{0} := 1, \quad \binom{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}, \quad \binom{\frac{1}{2}}{2} = \frac{\frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{2})}{2!} = -\frac{1}{8}, \quad \binom{\frac{1}{2}}{3} = \frac{\frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{2}) \cdot (-\frac{3}{2})}{3!} = \frac{1}{16}.$$

Ponadto, bezpośrednio z definicji wynika równość

$$\binom{-\alpha}{k} = (-1)^k \cdot \binom{\alpha+k-1}{k}, \quad \alpha > 0, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Zatem  $f^{(k)}(0) = \binom{\alpha}{k} k!$ , dla  $k \geq 1$ , i stąd

$$(1+x)^\alpha = 1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \dots + \binom{\alpha}{n-1}x^{n-1} + \binom{\alpha}{n}\frac{x^n}{(1+c)^{n-\alpha}}. \quad (18)$$

Podobnie jak w zadaniach 1.1 i 1.8 nietrudno wykazać, że reszta we wzorze (18) dąży do zera dla  $x \in (-1, 1)$ . W tym celu rozważaną resztę trzeba zapisać w postaci Cauchy'ego. Zatem w przedziale  $(-1, 1)$  mamy rozwinięcie

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \binom{\alpha}{3}x^3 + \dots \quad (19)$$

Zauważmy, że wzory (5), (7) i (8) to szczególne przypadki (19). Mianowicie, podstawmy  $\alpha = -1$ . Wówczas  $\binom{-1}{k} = (-1)^k$  i wzór (19) zapisujemy jako

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots$$

Otrzymaliśmy w ten sposób równość (5) dla  $-x$ . Takie podstawienie jest poprawne, ponieważ, jeśli  $|x| < 1$ , to również  $|-x| < 1$ .

Niech teraz  $\alpha = -2$ . Wtedy  $\binom{-2}{k} = (-1)^k(k+1)$ , dla  $k \geq 1$ , zatem (19) przyjmuje postać

$$\frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k(k+1)x^k = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \dots,$$

czyli wzór (7), także dla  $-x$ .

**Zadanie 1.11.** Napisać szeregi Taylora dla funkcji:  $\sqrt{1+x}$ ,  $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ .

**Rozwiązanie.** Wykorzystamy rozwinięcie (19). W pierwszym przypadku  $\alpha = \frac{1}{2}$ , zatem

$$\sqrt{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{k} x^k, \quad x \in (-1, 1).$$

Pozostaje obliczyć współczynniki przy potęgach  $x$ . Dla  $k = 0$  i  $k = 1$  mamy kolejno  $\binom{\frac{1}{2}}{0} = 1$ ,  $\binom{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$ . Natomiast dla  $k \geq 2$  współczynniki te można zapisać jako

$$\binom{\frac{1}{2}}{k} = \frac{\frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2} - 1) \cdot (\frac{1}{2} - 1) \dots (\frac{1}{2} - (k-1))}{k!} = (-1)^{k-1} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2k-3)}{2^k k!}.$$

Stąd szereg Taylora rozważanej funkcji ma postać

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2^2 \cdot 2!}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2^3 \cdot 3!}x^3 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^4 \cdot 4!}x^4 + \dots$$

W drugim przypadku  $\alpha = -\frac{1}{2}$  i z (19) otrzymujemy

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{k} x^k, \quad x \in (-1, 1).$$

Pierwsze dwa współczynniki są równe  $\binom{-\frac{1}{2}}{0} = 1$ ,  $\binom{-\frac{1}{2}}{1} = -\frac{1}{2}$ . Jeśli  $k \geq 2$ , to

$$\binom{-\frac{1}{2}}{k} = \frac{-\frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{2} - 1) \cdot (-\frac{1}{2} - 1) \dots (-\frac{1}{2} - (k-1))}{k!} = (-1)^k \cdot \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2k-1)}{2^k k!}.$$

Zatem dla  $x \in (-1, 1)$  mamy

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{2^2 \cdot 2}x^2 - \frac{3 \cdot 5}{2^3 \cdot 3!}x^3 + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2^4 \cdot 4!}x^4 - \dots \quad (20)$$

Rozwinięcie to wykorzystamy do wyznaczenia szeregu Taylora funkcji  $\arcsin x$ , patrz zadanie 1.12.

**Zadanie 1.12.** Wykorzystując twierdzenie o całkowaniu szeregu potęgowego napisać szeregi Taylora dla funkcji

$$\text{a) } f(x) = \ln(1+x) \quad \text{b) } g(x) = \arctg x \quad \text{c) } h(x) = \arcsin x.$$

**Rozwiązanie.** a) Twierdzenie o całkowaniu szeregu mówi, że jeśli funkcję  $f$  można zapisać tak jak w (6), czyli zmieniając zmienną  $x$  na  $t$  w postaci

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (t - x_0)^k, \quad t \in (a, b), \quad (21)$$

to wówczas ma miejsce równość

$$\int_{x_0}^x f(t) dt = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_{x_0}^x (t - x_0)^k dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} (x - x_0)^{k+1}, \quad (22)$$

gdzie  $x \in (a, b)$ . Innymi słowy, prawą stronę (21) można całkować wyraz po wyrazie. Natomiast ostatnia równość w (22) wynika z obliczenia całki

$$\int_{x_0}^x (t - x_0)^k dt = \left[ \frac{(t - x_0)^{k+1}}{k+1} \right]_{x_0}^x = \frac{(x - x_0)^{k+1}}{k+1}.$$

Z zadania 1.1 wiadomo, że w przedziale  $(-1, 1)$  prawdziwe jest rozwinięcie

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^k = 1 - t + t^2 - t^3 + t^4 - \dots$$

Zgodnie z (22), całkujemy obie strony powyższej równości w przedziale od 0 do  $x$ , tzn.

$$\int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \int_0^x (1 - t + t^2 - t^3 + t^4 - \dots) dt$$

i stąd otrzymujemy rozwinięcie (16), czyli

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{k+1}}{k+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

b) Zapisujemy wzór (5) dla  $x = -t^2$ , tzn.

$$\frac{1}{1+t^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^{2k} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + t^8 - \dots$$

Tak jak w punkcie a) całkujemy obie strony od 0 do  $x$

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \int_0^x (1 - t^2 + t^4 - t^6 + t^8 - \dots) dt$$

i wykorzystując (22) dostajemy

$$\arctg x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad (23)$$

Z twierdzenia o całkowaniu szeregu wynika, że rozwinięcie (23) jest prawdziwe w przedziale  $(-1, 1)$ . Można jednak udowodnić, że szereg ten jest zbieżny także dla  $x = 1$ , a więc również dla  $x = -1$ . Zbieżność w tych punktach jest warunkowa. W szczególności, dla  $x = 1$  otrzymujemy z faktu, że  $\arctg 1 = \frac{\pi}{4}$ , szereg Leibniza

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$$

c) Podstawiając  $x = -t^2$  w rozwinięciu (20) otrzymamy

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{k} (-t^2)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \binom{-\frac{1}{2}}{k} t^{2k}.$$

Następnie, tak jak w poprzednich punktach, całkujemy obie strony od 0 do  $x$

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \binom{-\frac{1}{2}}{k} \int_0^x t^{2k} dt.$$

Ponieważ

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \arcsin x, \quad \int_0^x t^{2k} dt = \frac{x^{2k+1}}{2k+1},$$

więc

$$\arcsin x = x + \frac{1}{3 \cdot 2} x^3 + \frac{3}{5 \cdot 2^2 \cdot 2!} x^5 + \frac{3 \cdot 5}{7 \cdot 2^3 \cdot 3!} x^7 + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{9 \cdot 2^4 \cdot 4!} x^9 + \dots \quad (24)$$

Ponadto, można wykazać, że powyższy szereg jest zbieżny również dla  $x = 1$ , a więc z uwagi na nieparzystość funkcji  $\arcsin x$ , także dla  $x = -1$ . Zatem rozwinięcie (24) jest prawdziwe w przedziale  $\langle -1, 1 \rangle$ .

---

## Literatura

- [1] Fichtenholz G.M., Rachunek różniczkowy i całkowy, tomy 1-2, PWN, Warszawa, 2007
- [2] Krysicki W., Włodarski L., Analiza matematyczna w zadaniach, część I, PWN, Warszawa, 2010

## 2. Obliczanie i zastosowanie całek oznaczonych

**Zadanie 2.1.** Wyprowadź wzory na objętość oraz pole powierzchni obrotowej walca o promieniu podstawy  $r > 0$  i wysokości  $h > 0$ .

**Rozwiązanie.** Skorzystamy z następującego twierdzenia:

**Twierdzenie 2.1.** Niech funkcja  $f$  będzie ciągła i nieujemna na przedziale  $[a, b]$ .

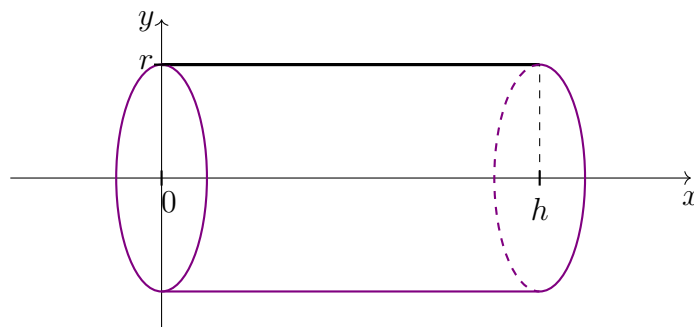
Objętość bryły obrotowej  $V$  powstałej przez obrót wokół osi  $Ox$  krzywej

$$y = f(x), \quad x \in [a, b],$$

jest równa

$$|V| = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$

Walec o promieniu podstawy  $r$  i wysokości  $h$  powstaje w wyniku obrotu wokół osi  $Ox$  funkcji  $f$  danej wzorem  $f(x) = r$  dla  $x \in [0, h]$ .



Wobec tego

$$|V| = \pi \int_0^h r^2 dx = \pi r^2 \int_0^h 1 dx = \pi r^2 \cdot x \Big|_0^h = \pi r^2 h.$$

Przy obliczaniu pola powierzchni obrotowej skorzystamy z następującego twierdzenia:

**Twierdzenie 2.2.** Niech funkcja  $f$  będzie ciągła i nieujemna na przedziale  $[a, b]$ .

Pole powierzchni obrotowej bryły powstałej przez obrót wokół osi  $Ox$  krzywej

$$y = f(x), \quad x \in [a, b],$$

jest równe

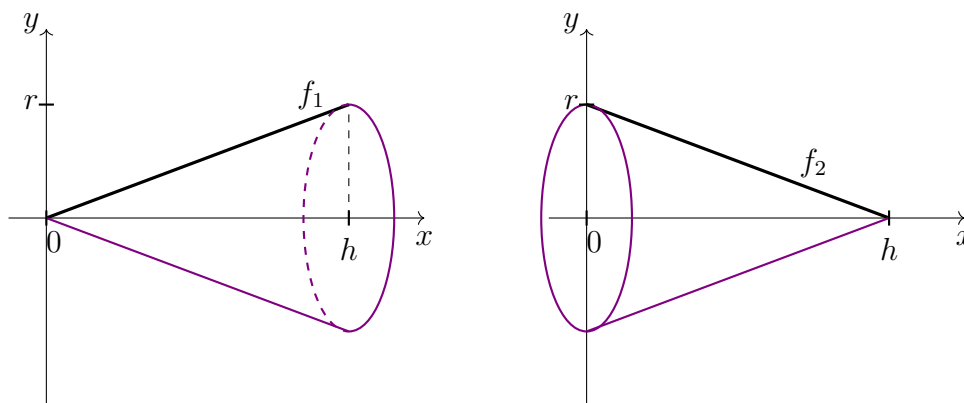
$$|P| = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Skoro funkcja  $f$  jest stała, to jej pochodna wszędzie jest równa zero, a więc

$$|P| = 2\pi \int_0^h r \sqrt{1} dx = 2\pi r \cdot x \Big|_0^h = 2\pi r h.$$

**Zadanie 2.2.** Wyprowadź wzory na objętość oraz pole powierzchni obrotowej stożka o promieniu podstawy  $r > 0$  i wysokości  $h > 0$ .

**Rozwiązanie.** Aby skorzystać z Twierdzeń 2.1 i 2.2, umieszczamy stożek w układzie współrzędnych tak, by był bryłą powstałą w wyniku obrotu wokół osi  $Ox$  pewnej funkcji. Możemy to zrobić na dwa sposoby:



Przeprowadzimy tutaj rachunki dla funkcji  $f_1$ , a znalezienie wzoru na  $f_2$  i wykorzystanie go obliczenia objętości i pola powierzchni bocznej pozostawiamy jako ćwiczenie.

Ponieważ  $f_1$  jest funkcją liniową, to  $f_1(x) = a \cdot x + b$ ,  $x \in [0, h]$  dla pewnych  $a, b \in \mathbb{R}$ . Aby wyznaczyć  $a$  i  $b$ , zauważamy, że  $f_1(0) = 0$  i  $f_1(h) = r$ . Zatem  $b = 0$ ,  $a = \frac{r}{h}$  i możemy policzyć:

$$|V| = \pi \int_0^h \left( \frac{r}{h} \cdot x \right)^2 dx = \frac{\pi r^2}{h^2} \int_0^h x^2 dx = \frac{\pi r^2}{h^2} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^h = \frac{1}{3} \pi r^2 h.$$

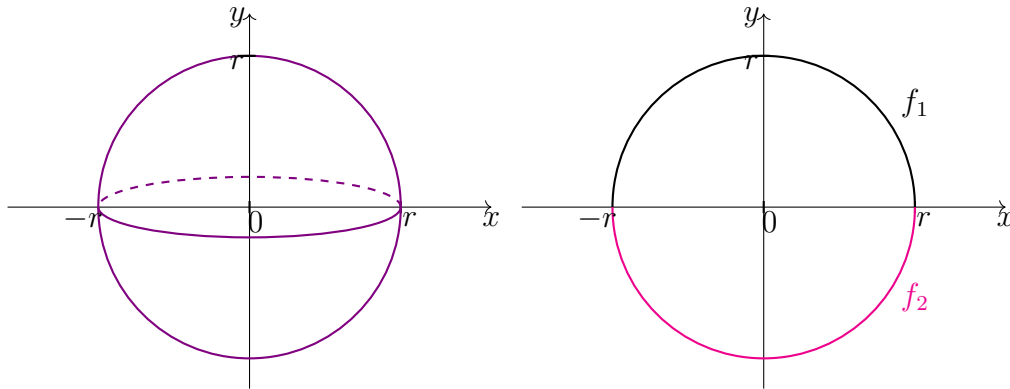
Pochodna funkcji  $f_1$  jest wszędzie jest równa  $\frac{r}{h}$ , a więc

$$\begin{aligned} |P| &= 2\pi \int_0^h \frac{r}{h} \cdot x \cdot \sqrt{1 + \left( \frac{r}{h} \right)^2} dx = 2\pi \int_0^h \frac{r}{h^2} \cdot x \cdot \sqrt{h^2 + r^2} dx \\ &= \frac{2\pi r \sqrt{h^2 + r^2}}{h^2} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^h = \pi r \sqrt{h^2 + r^2}. \end{aligned}$$

Zauważmy, że  $\sqrt{h^2 + r^2}$  jest długością tworzącej stożka — oznaczmy ją przez  $l$ . Wtedy otrzymany przez nas wzór na pole powierzchni bocznej ma postać znaną ze szkoły:  $|P| = \pi r l$ .

**Zadanie 2.3.** Wyprowadź wzory na objętość oraz pole powierzchni kuli o promieniu  $r > 0$ .

**Rozwiązanie.** Aby skorzystać z Twierdzeń 2.1 i 2.2, umieszczamy kulę w układzie współrzędnych:



Równanie okręgu o środku w punkcie  $(0, 0)$  promieniu  $r$  ma postać

$$x^2 + y^2 = r^2 \iff y^2 = r^2 - x^2,$$

ale oczywiście nie opisuje ono żadnej funkcji, a ew. dwie funkcje sklejone ze sobą. Pierwsza z nich jest dana wzorem  $f_1(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ , a druga  $f_2(x) = -\sqrt{r^2 - x^2}$ . Obie funkcje są zdefiniowane dla  $x \in [-r, r]$ . Ponieważ kula powstaje, na przykład, w wyniku obrotu wokół osi  $Ox$  nieujemnej funkcji  $f_1$ , aby obliczyć jej pole i objętość, możemy skorzystać z Twierdzeń 2.1 i 2.2:

$$\begin{aligned} |V| &= \pi \int_{-r}^r r^2 - x^2 dx = \pi \cdot \left( r^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-r}^r \\ &= \pi \cdot \left( r^3 - \frac{r^3}{3} \right) - \pi \cdot \left( -r^3 + \frac{r^3}{3} \right) = \frac{4}{3} \pi r^3. \end{aligned}$$

Skoro  $f_1'(x) = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$ , to dostajemy

$$\begin{aligned} |P| &= 2\pi \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} dx = 2\pi \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} \cdot \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - x^2}} dx \\ &= 2\pi \int_{-r}^r r dx = 2\pi r \cdot x \Big|_{-r}^r = 4\pi r^2. \end{aligned}$$

**Zadanie 2.4.** Wyprowadź wzór na długość okręgu o promieniu  $r > 0$ .

**Rozwiązanie.** Skorzystamy następującego twierdzenia:

[www.viacarpatia.pro](http://www.viacarpatia.pro)

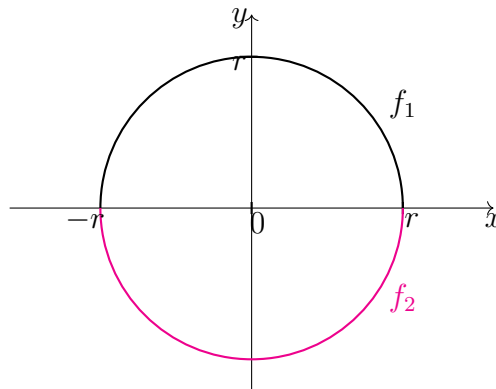
**Twierdzenie 2.3.** Załóżmy, że funkcja  $f$  ma ciągłą pochodną na przedziale  $[a, b]$ . Długość krzywej

$$y = f(x), \quad x \in [a, b],$$

jest równa

$$|L| = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Podobnie jak w poprzednim zadaniu, myślimy o okręgu jako o sklejeniu wykresów dwóch funkcji  $f_1$  i  $f_2$  danych wzorami:  $f_1(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ ,  $f_2(x) = -\sqrt{r^2 - x^2}$ ,  $x \in [-r, r]$ .



Obliczymy długość krzywej tworzącej wykres funkcji  $f_1$ :

$$|L| = \int_{-r}^r \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} dx = r \int_{-r}^r \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx.$$

Jest to całka niewłaściwa, bo mianownik funkcji podcałkowej zeruje się w punktach  $x = r$  i  $x = -r$ . Zaczniemy od całki nieoznaczonej:

$$\int \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{r^2 \left(1 - \frac{x^2}{r^2}\right)}} dx = \frac{1}{r} \int \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2}} dx = (*),$$

podstawiamy:  $\frac{x}{r} = t$ , a więc  $x = rt$  oraz  $dx = r dt$ ,

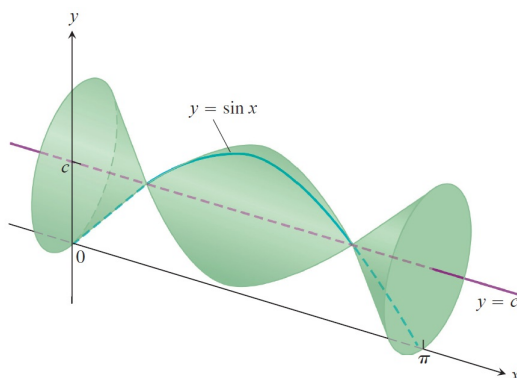
$$(*) = \frac{1}{r} \int \frac{r}{\sqrt{1 - t^2}} dt = \int \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}} dt = \arcsin(t) = \arcsin\left(\frac{x}{r}\right) + C.$$

Możemy teraz wrócić do wzoru na  $|L|$ :

$$\begin{aligned} |L| &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} r \int_{-r+\epsilon}^0 \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx + \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} r \int_0^{r-\epsilon} \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx \\ &= r \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \arcsin\left(\frac{x}{r}\right) \Big|_{-r+\epsilon}^0 + r \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \arcsin\left(\frac{x}{r}\right) \Big|_0^{r-\epsilon} \\ &= r(\arcsin(0) - \arcsin(-1)) + r(\arcsin(1) - \arcsin(0)) = r \cdot \frac{\pi}{2} + r \cdot \frac{\pi}{2} = \pi r. \end{aligned}$$

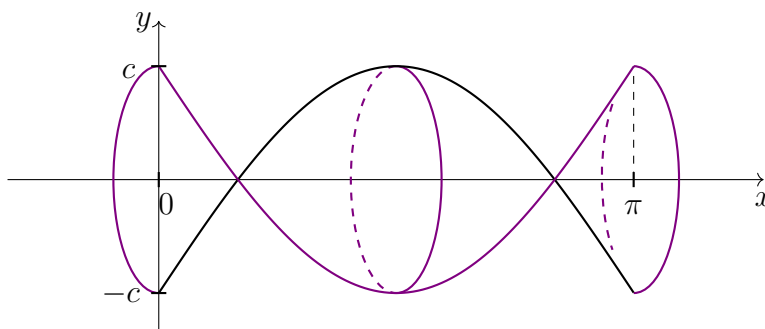
Zatem, zgodnie z oczekiwaniami, długość całego okręgu jest równa  $2\pi r$ .

**Zadanie 2.5.** Wykres funkcji  $\sin x$  dla  $x \in [0, \pi]$  obracamy wokół prostej  $y = c$  dla pewnego  $c \in [0, 1]$ , jak na rysunku:



- Znajdź wartość  $c$ , dla której objętość tak powstałej bryły jest najmniejsza.
- Znajdź wartość  $c$ , dla której objętość tak powstałej bryły jest największa.

**Rozwiązanie.** Zauważmy, że możemy (równoważnie) myśleć o obracaniu wykresu funkcji  $f(x) = \sin x - c$ ,  $x \in [0, \pi]$  wokół osi  $Ox$ . Dzięki temu będziemy mogli skorzystać z Twierdzenia 2.1.



$$|V| = \pi \int_0^{\pi} (\sin x - c)^2 dx = \pi \int_0^{\pi} (\sin^2 x + c^2 - 2c \sin x) dx.$$

Całkę  $\int \sin^2 x dx$  można policzyć korzystając np. z tożsamości trygonometrycznej

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2},$$

my natomiast użyjemy wzoru na całkowanie przez części:

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x \, dx &= \left| \begin{array}{l} u = \sin x \quad v' = \sin x \\ u' = \cos x \quad v = -\cos x \end{array} \right| = -\sin x \cos x + \int \cos^2 x \, dx \\ &= -\sin x \cos x + \int (1 - \sin^2 x) \, dx \\ &= -\sin x \cos x + x - \int \sin^2 x \, dx.\end{aligned}$$

Zatem

$$\int \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x) + C.$$

Możemy teraz obliczyć objętość

$$\begin{aligned}|V| &= \pi \left( \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x) + c^2 x + 2c \cos x \right) \Big|_0^\pi \\ &= \frac{\pi}{2} (\pi - \sin \pi \cos \pi) + c^2 \pi^2 + 2c\pi \cos \pi - 2c\pi = \pi^2 c^2 - 4\pi c + \frac{\pi^2}{2}.\end{aligned}$$

Aby znaleźć ekstrema globalne funkcji  $V$  danej wzorem  $V(c) = \pi^2 c^2 - 4\pi c + \frac{\pi^2}{2}$  na przedziale  $[0, 1]$ , liczymy jej pochodną i znajdujemy miejsca zerowe:

$$V'(c) = 0 \iff 2\pi^2 c - 4\pi = 0 \iff c = \frac{2}{\pi},$$

a następnie porównujemy wartości:

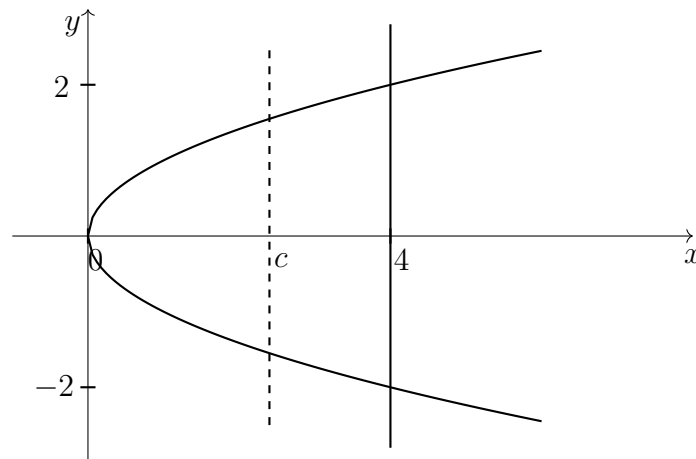
$$\begin{aligned}V(0) &= \frac{\pi^2}{2} \approx 4,93, \\ V\left(\frac{2}{\pi}\right) &= 4 - 8 + \frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi^2}{2} - 4 \approx 0,93, \\ V(1) &= \frac{3\pi^2}{2} - 4\pi \approx 2,23.\end{aligned}$$

Wobec tego objętość bryły jest najmniejsza, gdy  $c = \frac{2}{\pi}$ , a największa, gdy  $c = 0$ .

**Zadanie 2.6.** Obszar  $A$  ograniczony krzywymi  $y^2 = x$  oraz  $x = 4$  został podzielony na dwie części o równych polach prostą o równaniu  $x = c$ . Wyznacz wartość  $c$ . Przed obliczeniami wykonaj rysunek i zapisz wyznaczony obszar w postaci zbioru punktów.

**Rozwiązanie.** Krzywa  $y^2 = x$  składa się z wykresów dwóch funkcji  $y = \sqrt{x}$  oraz  $y = -\sqrt{x}$ , które przecinają się z prostą  $x = 4$  w punktach  $(4, 2)$  oraz  $(4, -2)$ .

[www.viacarpatia.pro](http://www.viacarpatia.pro)



Zatem możemy zapisać

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 4, -\sqrt{x} \leq y \leq \sqrt{x}\}.$$

Zgodnie z treścią zadania zbiór  $A$  dzielimy na dwa:  $A_1$  i  $A_2$ , oczywiście  $c \in (0, 4)$ ,

$$A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq c, -\sqrt{x} \leq y \leq \sqrt{x}\},$$

$$A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq x \leq 4, -\sqrt{x} \leq y \leq \sqrt{x}\}.$$

Przy obliczaniu pól tych obszarów posłużymy się następującym twierdzeniem:

**Twierdzenie 2.4.** Jeżeli  $f(x) \leq g(x)$  dla  $x \in [a, b]$ , to obszar zawarty między wykresami funkcji  $f$  i  $g$  na przedziale  $[a, b]$ :

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\}$$

ma pole równe

$$|A| = \int_a^b (g(x) - f(x)) dx.$$

Zatem

$$|A_1| = \int_0^c \sqrt{x} - (-\sqrt{x}) dx = 2 \int_0^c \sqrt{x} dx,$$

$$|A_2| = \int_c^4 \sqrt{x} - (-\sqrt{x}) dx = 2 \int_c^4 \sqrt{x} dx,$$

a te całki możemy łatwo policzyć:

$$|A_1| = \frac{4}{3} \sqrt{x^3} \Big|_0^c = \frac{4}{3} \sqrt{c^3},$$

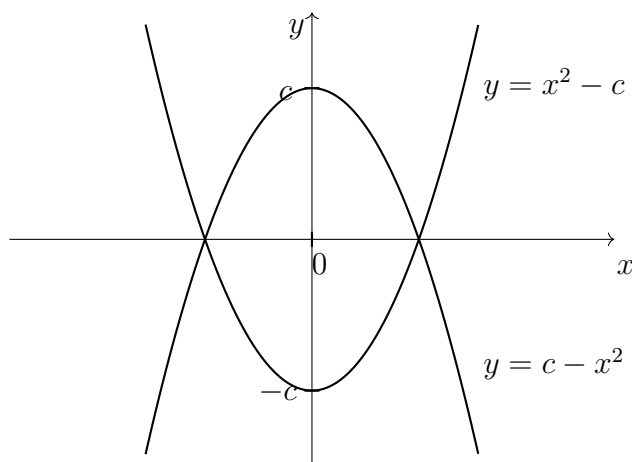
$$|A_2| = \frac{4}{3} \sqrt{x^3} \Big|_c^4 = \frac{36}{3} - \frac{4}{3} \sqrt{c^3}.$$

Mamy za zadanie znaleźć takie  $c \in (0, 4)$ , dla którego  $|A_1| = |A_2|$ , a więc rozwiązujemy równanie

$$\begin{aligned} |A_1| = |A_2| &\iff \frac{4}{3}\sqrt{c^3} = \frac{36}{3} - \frac{4}{3}\sqrt{c^3} \iff \frac{8}{3}\sqrt{c^3} = \frac{36}{3} \iff \sqrt{c^3} = \frac{9}{2} \\ &\iff c = \sqrt[3]{\frac{81}{4}} \implies c \approx 2,72. \end{aligned}$$

**Zadanie 2.7.** Znajdź wartość stałej  $c$  dla której pole obszaru pomiędzy parabolami  $y = x^2 - c$  i  $y = c - x^2$  wynosi 576. Wykonaj rysunek i zapisz opisany obszar w postaci zbioru punktów.

**Rozwiązanie.** Zaczynamy od rysunku:



Oczywiście zakładamy, że  $c > 0$ , bo w przeciwnym przypadku te parabole były rozłączne. Przecinają się one w punktach, dla których  $x^2 - c = c - x^2 \iff x = \pm\sqrt{c}$ . Możemy więc zdefiniować zbiór

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: -\sqrt{c} \leq x \leq \sqrt{c}, x^2 - c \leq y \leq c - x^2\}$$

i użyć Twierdzenia 2.4:

$$\begin{aligned} |A| &= \int_{-\sqrt{c}}^{\sqrt{c}} (c - x^2 - (x^2 - c)) dx = 2 \int_{-\sqrt{c}}^{\sqrt{c}} (c - x^2) dx \\ &= 2 \left( cx - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-\sqrt{c}}^{\sqrt{c}} = 2 \left( c\sqrt{c} - \frac{\sqrt{c^3}}{3} \right) - 2 \left( -c\sqrt{c} + \frac{\sqrt{c^3}}{3} \right) \\ &= 4 \left( c\sqrt{c} - \frac{\sqrt{c^3}}{3} \right) = \frac{8\sqrt{c^3}}{3}. \end{aligned}$$

Pozostaje tylko rozwiązać równanie

$$|A| = 576 \iff \frac{8\sqrt{c^3}}{3} = 576 \iff \sqrt{c^3} = 216 \iff c = 36.$$

**Zadanie 2.8.** Oblicz pola obszarów ograniczonych krzywą  $y = xe^{x^2}$  i prostą  $y = e \cdot x$ . Wykonaj rysunek i zapisz wyznaczony obszar w postaci zbioru punktów.

**Rozwiązanie.** Zaczynamy od znalezienia punktów przecięcia wykresów funkcji  $f_1(x) = xe^{x^2}$  i  $f_2(x) = e \cdot x$ :

$$\begin{aligned} f_1(x) = f_2(x) &\iff xe^{x^2} = e \cdot x \iff x = 0 \vee e^{x^2} = e \iff x = 0 \vee x^2 = 1 \\ &\iff x = 0 \vee x = -1 \vee x = 1. \end{aligned}$$

Wobec tego wykresy funkcji  $f_1$  i  $f_2$  przecinają się w punktach  $(-1, -e)$ ,  $(0, 0)$  oraz  $(1, e)$ .

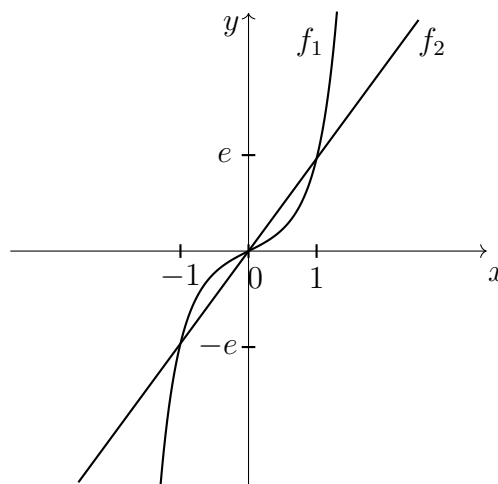
Wykres  $f_2$  łatwo narysować, bo to funkcja liniowa, natomiast naszkicowanie wykresu funkcji  $f_1$  może przysporzyć większych trudności. Niemniej jednak, znamy wartości tej funkcji w punktach  $x = -1, 0, 1$  i łatwo zauważyć, że  $f_2$  jest nieparzysta, czyli

$$f_2(-x) = -xe^{(-x)^2} = -xe^{x^2} = -f_2(x)$$

dla dowolnych  $x \in \mathbb{R}$  oraz

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_2(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f_2(x) = \infty.$$

Ponadto,  $f_2$  rośnie szybciej do nieskończoności niż  $f_1$ . Bazując na tych informacjach możemy wykonać rysunek:



Interesują nas zatem dwa zbiory

$$A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: -1 \leq x \leq 0, e \cdot x \leq y \leq xe^{x^2}\},$$

$$A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: 0 \leq x \leq 1, xe^{x^2} \leq y \leq e \cdot x\},$$

których pola są oczywiście równe. Policzmy więc tylko jedno z nich:

$$\begin{aligned} |A_2| &= \int_0^1 (e \cdot x - xe^{x^2}) dx = e \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 - \int_0^1 xe^{x^2} dx \\ &= \left| \begin{array}{ll} t = x^2 & x = 0 \implies t = 0 \\ dt = 2x dx & x = 1 \implies t = 1 \end{array} \right| \\ &= \frac{e}{2} - \frac{1}{2} \int_0^1 e^t dt = \frac{e}{2} - \frac{1}{2} e^t \Big|_0^1 = \frac{e}{2} - \frac{e}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

**Zadanie 2.9.** Naszkicuj podzbiór płaszczyzny na którym spełnione są nierówności:  $x - 2y^2 \geq 0$  oraz  $1 - x - |y| \geq 0$  i znajdź jego pole.

**Rozwiązanie.** Zaczynijmy od przekształcenia nierówności:

$$x - 2y^2 \geq 0 \iff y^2 \leq \frac{x}{2} \iff x \geq 0 \wedge -\sqrt{\frac{x}{2}} \leq y \leq \sqrt{\frac{x}{2}}$$

oraz

$$1 - x - |y| \geq 0 \iff |y| \geq x - 1 \iff x < 1 \vee \left( x \geq 1 \wedge (y \geq x - 1 \vee y \leq -x + 1) \right).$$

Zatem do zbioru zdefiniowanego drugą nierównością należy cała płaszczyzna oprócz nieskończonego trójkąta wyznaczonego przez proste  $y = \pm(x - 1)$  dla  $x > 1$ . Wyznamy jeszcze punkty przecięcia:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{x}{2}} = x - 1 &\iff x \geq 0 \wedge \frac{x}{2} = x^2 + 2x - 1 \iff x^2 + \frac{3}{2}x - 1 = 0 \\ &\iff x \geq 0 \wedge \left( x = -\frac{1}{2} \vee x = 2 \right) \iff x = 2 \end{aligned}$$

oraz

$$-\sqrt{\frac{x}{2}} = -x + 1 \iff x = 2.$$

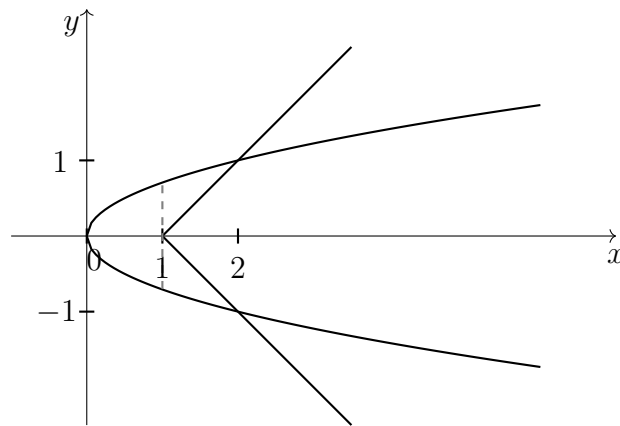
Otrzymujemy więc punkty  $(2, 1)$  i  $(2, -1)$ . Wykonajmy rysunek:

Interesujący nas zbiór dzielimy na trzy części:

$$A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: 0 \leq x \leq 1, -\sqrt{\frac{x}{2}} \leq y \leq \sqrt{\frac{x}{2}}\},$$

$$A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: 1 \leq x \leq 2, x - 1 \leq y \leq \sqrt{\frac{x}{2}}\},$$

$$A_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: 1 \leq x \leq 2, -\sqrt{\frac{x}{2}} \leq y \leq -x + 1\}.$$



Skoro  $|A_2| = |A_3|$ , to, korzystając z Twierdzenia 2.2, liczymy:

$$|A_1| = \int_0^1 2 \cdot \sqrt{\frac{x}{2}} dx = \sqrt{2} \int_0^1 \sqrt{x} dx = \frac{2\sqrt{2}}{3} \sqrt{x^3} \Big|_0^1 = \frac{2\sqrt{2}}{3},$$

$$|A_2| = \int_1^2 \sqrt{\frac{x}{2}} - x + 1 dx = \left( \frac{2\sqrt{x^3}}{3\sqrt{2}} - \frac{x^2}{2} + x \right) \Big|_1^2 = \frac{5}{6} - \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

### 3. Liczby zespolone

**Zadanie 3.1.** Obliczyć: a)  $(2 + 3i) + (3 - i)$ , b)  $(1 - 2i) - (5 + 3i)$ , wyniki przedstawić w postaci algebraicznej.

**Rozwiązanie.** Dodawanie (odejmowanie) liczb zespolonych zapisanych w postaci algebraicznej wykonujemy w ten sposób, że dodajemy (odejmujemy) ich części rzeczywiste i części urojone odpowiednio. W naszym zadaniu mamy:

$$\text{a) } (2 + 3i) + (3 - i) = (2 + 3) + (3i + (-i)) = 5 + 2i,$$

$$\text{b) } (1 - 2i) - (5 + 3i) = (1 - 5) + (-2i - 3i) = -4 - 5i.$$

**Zadanie 3.2.** Obliczyć  $(1 - i)(-1 + i\sqrt{3})$ .

**Rozwiązanie.** Liczby zespolone  $z, w$  zapisane w postaci algebraicznej,  $z = x + iy$ ,  $w = u + iv$ , gdzie  $x, y, u, v \in \mathbb{R}$ , mnożymy tak jak wielomiany, zastępując  $i^2$  przez  $-1$ , czyli

$$(x + iy)(u + iv) = xu + iyu + ixv + i^2yv = (xu - yv) + i(xv + yu).$$

Zatem

$$\begin{aligned} (1 - i)(-1 + i\sqrt{3}) &= 1 \cdot (-1) + (-i) \cdot (-1) + 1 \cdot i\sqrt{3} + (-i) \cdot i\sqrt{3} = \\ &= -1 + i + i\sqrt{3} - i^2\sqrt{3} = -1 + i + i\sqrt{3} + \sqrt{3} = \\ &= -1 + \sqrt{3} + i(1 + \sqrt{3}). \end{aligned}$$

**Zadanie 3.3.** Obliczyć  $\frac{2 + i}{3 - i}$ .

**Rozwiązanie.** Skorzystamy ze wzoru  $\frac{z}{w} = \frac{z \cdot \bar{w}}{|w|^2}$ ,  $w \neq 0$ , gdzie  $\bar{w}$  oznacza liczbę sprzężoną z liczbą  $w$ , czyli różniącą się od  $w$  znakiem części urojonej. Jeśli  $w = u + iv$ ,  $u, v \in \mathbb{R}$ , to  $\bar{w} = u - iv$ .

Zatem mamy:

$$\frac{2 + i}{3 - i} = \frac{2 + i}{3 - i} \cdot \frac{3 + i}{3 + i} = \frac{(2 + i)(3 + i)}{(3 - i)(3 + i)} = \frac{6 + 3i + 2i + i^2}{9 - 3i + 3i - i^2} = \frac{5 + 5i}{9 + 1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i.$$

**Uwaga.** Zauważmy, że dla dowolnej liczby zespolonej  $z = x + iy$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$  mamy

$$z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2,$$

gdzie nieujemną liczbę rzeczywistą  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$  nazywamy *modułem* liczby zespolonej  $z = x + iy$ .

Rzeczywiście

$$z \cdot \bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + iyx - ixy - i^2y^2 = x^2 + y^2.$$

**Zadanie 3.4.** Udowodnić, że

$$i^n = \begin{cases} 1, & \text{dla } n = 4k, \\ i, & \text{dla } n = 4k + 1, \\ -1, & \text{dla } n = 4k + 2, \\ -i, & \text{dla } n = 4k + 3, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

**Rozwiązanie.** Z definicji liczby  $i$  wiemy, że  $i^2 = -1$ . Zatem, jeśli  $n = 4k$  dla pewnej liczby  $k \in \mathbb{Z}$ , to

$$i^n = i^{4k} = i^{2 \cdot 2k} = (i^2)^{2k} = (-1)^{2k} = 1.$$

Teraz mamy

$$i^{4k+1} = i^{4k} \cdot i = 1 \cdot i = i,$$

$$i^{4k+2} = i^{4k} \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = -1,$$

$$i^{4k+3} = i^{4k} \cdot i^2 \cdot i = 1 \cdot (-1) \cdot i = -i.$$

**Zadanie 3.5.** Obliczyć  $\operatorname{Im}\left((3 - 2i)^2 - \frac{1 + 2i}{1 - 4i}\right)$ .

**Rozwiązanie.** Obliczając wartości poszczególnych elementów wyrażenia w nawiasach zewnętrznych mamy:

$$(3 - 2i)^2 = 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 2i + (2i)^2 = 9 - 12i - 4 = 5 - 12i,$$

$$\frac{1 + 2i}{1 - 4i} = \frac{1 + 2i}{1 - 4i} \cdot \frac{1 + 4i}{1 + 4i} = \frac{1 + 2i + 4i - 8i^2}{1 + 16} = \frac{9 + 6i}{17}.$$

Stąd

$$\operatorname{Im}\left(5 - 12i - \frac{9 + 6i}{17}\right) = \operatorname{Im}\left(5 - \frac{9}{17} + \left(-12 - \frac{6}{17}\right)i\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{76}{17} - \frac{210}{17}i\right) = -\frac{210}{17}.$$

**Zadanie 3.6.** Niech  $z = x + iy$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$ . Wyznaczyć

a)  $\operatorname{Re}\left(\frac{\bar{z}}{z}\right)$ ,      b)  $\operatorname{Im}\left(\frac{z}{z-i}\right)$ .

**Rozwiązanie.**

a) Przyjmując  $z = x + iy \neq 0$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$ , po prostych rachunkach dostajemy:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\left(\frac{\bar{z}}{z}\right) &= \operatorname{Re}\left(\frac{x-iy}{x+iy}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{x-iy}{x+iy} \cdot \frac{x-iy}{x-iy}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{(x-iy)^2}{x^2+y^2}\right) = \\ &= \operatorname{Re}\left(\frac{x^2-y^2-2ixy}{x^2+y^2}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + i\frac{-2xy}{x^2+y^2}\right) = \\ &= \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}. \end{aligned}$$

b) Niech teraz  $z = x + iy \neq i$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$ . Wtedy

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}\left(\frac{z}{z-i}\right) &= \operatorname{Im}\left(\frac{x+iy}{x+iy-i}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{x+iy}{x+i(y-1)} \cdot \frac{x-i(y-1)}{x-i(y-1)}\right) = \\ &= \operatorname{Im}\left(\frac{x^2+ixy-ix(y-1)-i^2y(y-1)}{x^2+(y-1)^2}\right) = \\ &= \operatorname{Im}\left(\frac{x^2+y^2-y+ixy-ixy+ix}{x^2+(y-1)^2}\right) = \\ &= \operatorname{Im}\left(\frac{x^2+y^2-y}{x^2+(y-1)^2} + i\frac{x}{x^2+(y-1)^2}\right) = \\ &= \frac{x}{x^2+(y-1)^2}. \end{aligned}$$

**Zadanie 3.7.** Wyznaczyć wszystkie liczby zespolone  $z$  dla, których wyrażenie  $w = \frac{z}{z+i}$  jest

- a) liczbą rzeczywistą,      b) liczbą urojoną.

**Rozwiązanie.** Niech  $z = x + iy$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$  będzie liczbą zespoloną różną od  $-i$ . Wtedy

$$\begin{aligned} w &= \frac{z}{z+i} = \frac{x+iy}{x+i(y+1)} \cdot \frac{x-i(y+1)}{x-i(y+1)} = \frac{x^2+ixy-ix(y+1)-i^2y(y+1)}{x^2+(y+1)^2} = \\ &= \frac{x^2+y^2+y}{x^2+(y+1)^2} + i\frac{-x}{x^2+(y+1)^2}. \end{aligned}$$

a) Wyrażenie  $w$  będzie liczbą rzeczywistą wtedy i tylko wtedy, gdy  $\operatorname{Im} w = 0$ , czyli wtedy, gdy

$$\operatorname{Im} w = \frac{-x}{x^2+(y+1)^2} = 0 \iff x = 0.$$

Oznacza to, że  $w$  będzie liczbą rzeczywistą wtedy i tylko wtedy, gdy  $z$  będzie liczbą urojoną.

- b) Wyrażenie  $w$  będzie liczbą urojoną wtedy i tylko wtedy, gdy  $\operatorname{Re} w = 0$ , czyli wtedy, gdy

$$\operatorname{Re} w = \frac{x^2 + y^2 + y}{x^2 + (y + 1)^2} = 0 \iff x^2 + y^2 + y = 0 \wedge x^2 + (y + 1)^2 \neq 0.$$

Ostatnie równanie spełniają punkty  $(x, y)$  leżące na okręgu o środku w punkcie  $(x_0, y_0) = (0, -\frac{1}{2})$  i promieniu  $r = \frac{1}{2}$ , z wyjątkiem punktu  $(0, -1)$ .

**Zadanie 3.8.** Znaleźć miejsce geometryczne punktów  $z$  opisanych równością  $\operatorname{Re} \frac{1}{z} = 2$ .

**Rozwiązanie.** Niech  $z = x + iy$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$  będzie liczbą różną od zera. Wtedy

$$\operatorname{Re} \frac{1}{z} = \operatorname{Re} \left( \frac{1}{z} \cdot \frac{\bar{z}}{\bar{z}} \right) = \operatorname{Re} \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \operatorname{Re} \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Z warunków zadania wynika, że

$$\frac{x}{x^2 + y^2} = 2 \iff \frac{1}{2}x = x^2 + y^2 \iff x^2 - \frac{1}{2}x + y^2 = 0.$$

Ostatnia równość jest równaniem okręgu o środku  $(x_0, y_0) = (\frac{1}{4}, 0)$  i promieniu  $r = \frac{1}{4}$ , z którego uwzględniając warunek  $z \neq 0$  należy usunąć początek układu współrzędnych.

**Zadanie 3.9.** Udowodnić, że

$$\operatorname{Re}(z \cdot w) = \operatorname{Re}(\bar{z} \cdot \bar{w}), \quad z, w \in \mathbb{C}.$$

**Rozwiązanie.** Niech  $z = x + iy$ ,  $w = u + iv$ ,  $x, y, u, v \in \mathbb{R}$ , będą dowolnie wybranymi liczbami zespolonymi. Wtedy

$$\operatorname{Re}(z \cdot w) = \operatorname{Re} [(x + iy)(u + iv)] = \operatorname{Re} [xu - yv + i(xv + yu)] = xu - yv.$$

Podobnie

$$\operatorname{Re}(\bar{z} \cdot \bar{w}) = \operatorname{Re} [(x - iy)(u - iv)] = \operatorname{Re} [xu - yv - i(xv + yu)] = xu - yv.$$

Otrzymaliśmy te same wartości, więc

$$\operatorname{Re}(z \cdot w) = \operatorname{Re}(\bar{z} \cdot \bar{w}),$$

dla dowolnych  $z, w \in \mathbb{C}$ .

**Zadanie 3.10.** Wykazać, że

$$\operatorname{Re}\left(\frac{z}{w}\right) = \frac{\operatorname{Re}(\bar{z} \cdot w)}{|w|^2}, \quad w \neq 0.$$

**Rozwiązanie.** Niech  $z, w \neq 0$  będą dowolnie wybranymi liczbami zespolonymi. Wtedy

$$\operatorname{Re}\left(\frac{z}{w}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{z}{w} \cdot \frac{\bar{w}}{\bar{w}}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{z \cdot \bar{w}}{|w|^2}\right) = \frac{\operatorname{Re}(z \cdot \bar{w})}{|w|^2},$$

gdzie ostatnia równość wynika z faktu, że  $|w|^2$  jest liczbą rzeczywistą.

Teraz zauważmy, że liczby  $\bar{z} \cdot w$  i  $z \cdot \bar{w}$  są sprzężone, więc mają równe części rzeczywiste, czyli  $\operatorname{Re}(z \cdot \bar{w}) = \operatorname{Re}(\bar{z} \cdot w)$ . Stąd wynika równość

$$\operatorname{Re}\left(\frac{z}{w}\right) = \frac{\operatorname{Re}(\bar{z} \cdot w)}{|w|^2}, \quad w \neq 0.$$

**Zadanie 3.11.** Załóżmy, że  $z = x + iy$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$ . Udowodnić następujące nierówności:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|x| + |y|) \leq |z| \leq |x| + |y|.$$

**Rozwiązanie.** Zauważmy najpierw, że

$$\begin{aligned} 2|z|^2 - (|x| + |y|)^2 &= 2(|x|^2 + |y|^2) - (|x|^2 + |y|^2 + 2|x||y|) = \\ &= 2|x|^2 + 2|y|^2 - |x|^2 - |y|^2 - 2|x||y| = \\ &= |x|^2 - 2|x||y| + |y|^2 = (|x| - |y|)^2 \geq 0, \end{aligned}$$

czyli

$$|z|^2 \geq \frac{1}{2}(|x| + |y|)^2.$$

Ponieważ moduł jest liczbą nieujemną, to pierwiastkując obustronnie powyższą nierówność otrzymujemy

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|x| + |y|) \leq |z|.$$

Teraz zauważmy, że

$$|z|^2 = |x|^2 + |y|^2 \leq |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2.$$

Podobnie jak wcześniej, pierwiastkując stronami powyższą nierówność dostajemy

$$|z| \leq |x| + |y|.$$

Łącząc obie udowodnione nierówności, mamy

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|x| + |y|) \leq |z| \leq |x| + |y|.$$

**Zadanie 3.12.** Znaleźć miejsce geometryczne punktów spełniających nierówność

$$|z - 3 + 4i| < 5.$$

**Rozwiązanie.** Przypomnijmy, że dla liczby zespolonej  $z = x + iy$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$ , jej moduł  $|z|$ , czyli nieujemna liczba rzeczywista określona wzorem  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ , jest geometrycznie interpretowana jako odległość punktu  $(x, y)$  od początku układu współrzędnych. Dlatego moduł różnicy dwóch liczb zespolonych  $z$  i  $w$  odległości między tymi punktami. Rzeczywiście, jeśli  $z = x + iy$ ,  $w = u + iv$ ,  $x, y, u, v \in \mathbb{R}$ , to

$$|z - w| = |(x + iy) - (u + iv)| = |(x - u) + i(y - v)| = \sqrt{(x - u)^2 + (y - v)^2},$$

co jest znanym wzorem na odległość między punktami  $(x, y)$  i  $(u, v)$  na płaszczyźnie.

Korzystając z powyższej obserwacji widzimy, że nierówność

$$|z - 3 + 4i| < 5, \quad \text{czyli} \quad |z - (3 - 4i)| < 5,$$

jest spełniona przez te punkty  $z = x + iy$ , których odległość od punktu  $z_0 = 3 - 4i$  jest mniejsza od 5. Geometrycznie punkty te tworzą koło otwarte o środku  $(x_0, y_0) = (3, -4)$  i promieniu  $r = 5$ .

Możemy to potwierdzić bezpośrednim rachunkiem. Przyjmując, że  $z = x + iy$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$ , otrzymujemy

$$|z - 3 + 4i| = |x + iy - 3 + 4i| = |(x - 3) + (y + 4)i| = \sqrt{(x - 3)^2 + (y + 4)^2}.$$

Zatem warunek

$$|z - 3 + 4i| < 5 \quad \text{jest równoważny warunkowi} \quad \sqrt{(x - 3)^2 + (y + 4)^2} < 5.$$

Podnosząc ostatnią nierówność stronami do kwadratu dostajemy

$$(x - 3)^2 + (y + 4)^2 < 25,$$

czyli nierówność opisującą koło o środku  $(x_0, y_0) = (3, -4)$  i promieniu  $r = 5$ .

**Zadanie 3.13.** Znaleźć miejsce geometryczne punktów  $z$  opisanych nierównością

$$\left| \frac{z - 1}{z + 1} \right| \leq 1.$$

**Rozwiązanie.** Mamy

$$\begin{aligned} \left| \frac{z-1}{z+1} \right| \leq 1 &\iff |z-1| \leq |z+1| \iff \\ &\iff |z-1|^2 \leq |z+1|^2 \iff \\ &\iff (z-1)(\bar{z}-1) \leq (z+1)(\bar{z}+1) \iff \\ &\iff z \cdot \bar{z} - z - \bar{z} + 1 \leq z \cdot \bar{z} + z + \bar{z} + 1 \iff \\ &\iff 2z + 2\bar{z} \geq 0 \iff 4 \operatorname{Re} z \geq 0 \iff \operatorname{Re} z \geq 0. \end{aligned}$$

Ostatnia nierówność opisuje prawą półpłaszczyznę wraz z osią  $0y$ .

**Zadanie 3.14.** Udowodnić, że dla dowolnych dwóch liczb zespolonych  $z$  i  $w$  prawdziwa jest równość

$$|z+w|^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2 \operatorname{Re}(z \cdot \bar{w}).$$

Wykorzystując powyższą równość udowodnić *nierówność trójkąta*

$$||z| - |w|| \leq |z+w| \leq |z| + |w|.$$

**Rozwiązanie.** Skorzystamy z tego, że dla dowolnych liczb zespolonych  $z$ ,  $w$  prawdziwe są równości:

$$\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}, \quad z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re} z, \quad z \cdot \bar{z} = |z|^2.$$

Mamy

$$\begin{aligned} |z+w|^2 &= (z+w)(\overline{z+w}) = (z+w)(\bar{z} + \bar{w}) = z\bar{z} + z\bar{w} + w\bar{z} + w\bar{w} = \\ &= |z|^2 + z\bar{w} + \bar{z}w + |w|^2. \end{aligned}$$

Ponieważ liczby  $z\bar{w}$  i  $\bar{z}w$  są sprzężone, to ich suma jest równa  $2 \operatorname{Re}(z \cdot \bar{w})$ . Stąd wynika wzór

$$|z+w|^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2 \operatorname{Re}(z \cdot \bar{w}).$$

Z uwagi na nierówność  $\operatorname{Re}(z\bar{w}) \leq |z\bar{w}|$ , dostajemy

$$\begin{aligned} |z+w|^2 &\leq |z|^2 + |w|^2 + 2|z\bar{w}| = \\ &= |z|^2 + |w|^2 + 2|z||w| = (|z| + |w|)^2. \end{aligned}$$

Ponieważ moduły są zawsze liczbami nieujemnymi, to pierwiastkując stronami otrzymaną nierówność dowodzimy prawej części nierówności trójkąta

$$|z+w| \leq |z| + |w|. \quad (25)$$

Zauważmy teraz, że

$$|z| = |(z + w) + (-w)| \leq |z + w| + |w|,$$

co daje

$$|z| - |w| \leq |z + w|. \quad (26)$$

Zamieniając miejscami  $z$  i  $w$  w powyższej nierówności mamy

$$|w| - |z| \leq |z + w|. \quad (27)$$

Łącząc nierówności (25), (26) i (27) kończymy dowód nierówności

$$||z| - |w|| \leq |z + w| \leq |z| + |w|.$$

**Zadanie 3.15.** Uzasadnij, że jeśli  $|z| = 2$ , to

$$\text{a) } |\operatorname{Im}(1 - \bar{z} + z^2)| \leq 7, \quad \text{b) } |z^4 - 4z^2 + 3| \geq 3.$$

**Rozwiązanie.** Korzystając z nierówności trójkąta dostajemy

a)

$$|\operatorname{Im}(1 - \bar{z} + z^2)| \leq |1 - \bar{z} + z^2| \leq 1 + |\bar{z}| + |z^2| = 1 + |z| + |z|^2 = 1 + 2 + 2^2 = 7,$$

b)

$$|z^4 - 4z^2 + 3| = |z^2 - 3| \cdot |z^2 - 1| \geq (|z|^2 - 3)(|z|^2 - 1) = (4 - 3)(4 - 1) = 3.$$

**Zadanie 3.16.** Uzasadnij, że jeśli  $|z| = 3$ , to

$$\frac{5}{13} \leq \left| \frac{2z - 1}{4 + z^2} \right| \leq \frac{7}{5}.$$

**Rozwiązanie.** Korzystając z nierówności trójkąta mamy

$$\left| \frac{2z - 1}{4 + z^2} \right| \leq \frac{2|z| + 1}{|4 - |z|^2|} = \frac{2 \cdot 3 + 1}{|4 - 3^2|} = \frac{7}{5}$$

i podobnie

$$\left| \frac{2z - 1}{4 + z^2} \right| \geq \frac{|2|z| - 1|}{|4 + |z|^2|} = \frac{2 \cdot 3 - 1}{4 + 3^2} = \frac{5}{13}.$$

**Zadanie 3.17.** Udowodnić, że dla dowolnych liczb zespolonych  $z, w$  prawdziwa jest równość

$$|z - w|^2 + |z + w|^2 = 2|z|^2 + 2|w|^2.$$

Korzystając z powyższej równości uzasadnij, że

$$\left| \alpha + \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} \right| + \left| \alpha - \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} \right| = |\alpha + \beta| + |\alpha - \beta|,$$

dla dowolnych liczb rzeczywistych  $\alpha$  i  $\beta$ .

**Rozwiązanie.** Kluczowym elementem dowodu, będzie fakt, że kwadrat modułu liczby zespolonej jest równy iloczynowi tej liczby i jej sprzężenia.

Dla dowolnych liczb zespolonych  $z$  i  $w$  mamy

$$\begin{aligned} |z - w|^2 + |z + w|^2 &= (z - w)(\overline{z - w}) + (z + w)(\overline{z + w}) = \\ &= (z - w)(\bar{z} - \bar{w}) + (z + w)(\bar{z} + \bar{w}) = \\ &= z\bar{z} - w\bar{w} - z\bar{w} + w\bar{z} + z\bar{z} + w\bar{z} + z\bar{w} + w\bar{w} = \\ &= 2|z|^2 + 2|w|^2. \end{aligned}$$

Niech teraz  $z = \alpha + \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$ ,  $w = \alpha - \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$ , gdzie  $\alpha$  i  $\beta$  są dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Zastosujmy udowodnioną równość, zapisaną w postaci

$$|z|^2 + |w|^2 = \frac{1}{2}(|z - w|^2 + |z + w|^2),$$

do tak określonych liczb  $z$  i  $w$ . Dostajemy

$$\begin{aligned} \left| \alpha + \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} \right|^2 + \left| \alpha - \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} \right|^2 &= \frac{1}{2} \left( \left| \alpha + \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} - \alpha + \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} \right|^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left| \alpha + \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} + \alpha - \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} \right|^2 \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left( \left| 2\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} \right|^2 + |2\alpha|^2 \right) = \\ &= 2|\alpha^2 - \beta^2|^2 + 2\alpha^2. \end{aligned}$$

Policzmy teraz

$$\begin{aligned} &\left( \left| \alpha + \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} \right| + \left| \alpha - \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} \right| \right)^2 - (|\alpha + \beta| + |\alpha - \beta|)^2 = \\ &= \left| \alpha + \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} \right|^2 + \left| \alpha - \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} \right|^2 + 2\beta^2 - (2\alpha^2 + 2\beta^2) - 2|\alpha^2 - \beta^2| = \\ &= \left| \alpha + \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} \right|^2 + \left| \alpha - \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} \right|^2 - 2|\alpha^2 - \beta^2|^2 - 2\alpha^2 = 0, \end{aligned}$$

na mocy wcześniej wykazanej równości. Otrzymany wynik oznacza, że albo

$$\left| \alpha + \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} \right| + \left| \alpha - \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} \right| = |\alpha + \beta| + |\alpha - \beta|,$$

albo

$$\left| \alpha + \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} \right| + \left| \alpha - \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} \right| + |\alpha + \beta| + |\alpha - \beta| = 0.$$

Ponieważ wartości modułów są zawsze liczbami nieujemnymi, to ostatnia równość zachodzi jedynie w trywialnym przypadku, gdy  $\alpha = \beta = 0$ . Stąd dostajemy, że

$$\left| \alpha + \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} \right| + \left| \alpha - \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} \right| = |\alpha + \beta| + |\alpha - \beta|,$$

dla dowolnych liczb rzeczywistych  $\alpha$  i  $\beta$ .

**Zadanie 3.18.** Obliczyć  $\sqrt{-3 - 4i}$ .

**Rozwiązanie.** Szukamy takiej liczby zespolonej  $z = x + iy$ , gdzie  $x, y \in \mathbb{R}$ , że

$$(x + iy)^2 = -3 - 4i,$$

czyli

$$x^2 - y^2 + 2xyi = -3 - 4i.$$

Stąd, porównując części rzeczywiste i części urojone otrzymanej równości, dostajemy układ równań:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -3, \\ 2xy = -4. \end{cases}$$

Wyznaczając z drugiego równania  $y = \frac{-2}{x}$  (zauważmy, że  $x \neq 0$ ) i wstawiając otrzymane wyrażenie do pierwszego równania dostajemy równanie dwukwadratowe

$$x^2 - \frac{4}{x^2} = -3 \iff x^4 + 3x^2 - 4 = 0.$$

Rozwiązaniem tego równania są liczby:  $x_1 = 1$  i  $x_2 = -1$ . Wtedy  $y_1 = -2$ ,  $y_2 = 2$ . Zatem pierwiastkami kwadratowymi z liczby  $-3 - 4i$  są liczby

$$z_1 = 1 - 2i, \quad z_2 = -1 + 2i.$$

**Uwaga.** Postępując podobnie jak w rozwiązaniu zadania 3.18 można wykazać, że

$$\sqrt{x + iy} = \pm \left( \sqrt{\frac{x + \sqrt{x^2 + y^2}}{2}} + i \frac{y}{|y|} \sqrt{\frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{2}} \right). \quad (28)$$

Korzystając z powyższego wzoru dostajemy:

$$\begin{aligned}\sqrt{-3-4i} &= \pm \left( \sqrt{\frac{-3 + \sqrt{9+16}}{2}} + i \frac{-4}{4} \sqrt{\frac{\sqrt{9+16}+3}{2}} \right) = \\ &= \pm \left( \sqrt{\frac{5-3}{2}} - i \sqrt{\frac{5+3}{2}} \right) = \pm(1-2i).\end{aligned}$$

**Zadanie 3.19.** Rozwiązać równanie  $z^2 + (2+2i)z + (1+2i) = 0$ .

**Rozwiązanie.** Obliczamy wyróżnik tego równania

$$\Delta = (2+2i)^2 - 4 \cdot (1+2i) = 4 + 8i + 4i^2 - 4 - 8i = -4.$$

Stąd pierwiastkami równania są liczby:

$$\begin{aligned}z_1 &= \frac{-(2+2i) - \sqrt{-4}}{2} = \frac{-2-2i-2i}{2} = -1-2i, \\ z_2 &= \frac{-(2+2i) + \sqrt{-4}}{2} = \frac{-2-2i+2i}{2} = -1.\end{aligned}$$

**Zadanie 3.20.** Rozwiązać równanie  $z^2 - (2+i)z + (-1+7i) = 0$ .

**Rozwiązanie.** Obliczamy wyróżnik tego równania

$$\Delta = (-(2+i))^2 - 4 \cdot (-1+7i) = 4 + 4i + i^2 + 4 - 28i = 7 - 24i.$$

Korzystając ze wzoru (28) obliczamy jeden z pierwiastków  $\sqrt{\Delta}$ :

$$\begin{aligned}\sqrt{7-24i} &= \sqrt{\frac{7 + \sqrt{7^2 + 24^2}}{2}} + i \frac{-24}{24} \sqrt{\frac{\sqrt{7^2 + 24^2} - 7}{2}} = \\ &= \sqrt{\frac{7 + \sqrt{625}}{2}} - i \sqrt{\frac{\sqrt{625} - 7}{2}} = \sqrt{\frac{32}{2}} - i \sqrt{\frac{18}{2}} = 4 - 3i.\end{aligned}$$

Stąd pierwiastkami równania są liczby:

$$\begin{aligned}z_1 &= \frac{2+i - (4-3i)}{2} = \frac{-2+4i}{2} = -1+2i, \\ z_2 &= \frac{2+i + 4-3i}{2} = \frac{6-2i}{2} = 3-i.\end{aligned}$$

**Zadanie 3.21.** Liczbę  $z = 1 - \sqrt{3}$  przedstawić w postaci trygonometrycznej.

**Rozwiązanie.** Mamy

$$|z| = |1 - \sqrt{3}i| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2.$$

Ponadto

$$\cos \theta = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|} = \frac{1}{2} \quad \text{oraz} \quad \sin \theta = \frac{\operatorname{Im} z}{|z|} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Stąd wynika, że  $\arg(1 - \sqrt{3}i) = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , czyli  $\operatorname{Arg}(1 - \sqrt{3}i) = -\frac{\pi}{3}$ .

Zatem

$$1 - \sqrt{3}i = 2 \left( \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \right).$$

**Zadanie 3.22.** Ułamek  $\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}$  zapisać w postaci trygonometrycznej.

**Rozwiązanie.** Postępując podobnie jak w rozwiązaniu zadania 3.21 znajdujemy postaci trygonometryczne liczb  $1+i$  oraz  $\sqrt{3}-i$ . Mamy

$$1+i = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \quad \text{oraz} \quad \sqrt{3}-i = 2 \left( \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \right).$$

Stąd

$$\begin{aligned} \frac{1+i}{\sqrt{3}-i} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left[ \cos\left(\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) \right] = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left[ \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) \right]. \end{aligned}$$

**Zadanie 3.23.** Obliczyć  $\frac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-2}}$ , gdzie  $n$  jest liczbą naturalną.

**Rozwiązanie.** Zapisując liczby  $1+i$  oraz  $1-i$  w postaci trygonometrycznej mamy

$$1+i = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \quad \text{oraz} \quad 1-i = \sqrt{2} \left( \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right).$$

Stąd

$$\begin{aligned} \frac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-2}} &= \frac{(\sqrt{2})^n \left( \cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4} \right)}{(\sqrt{2})^{n-2} \left( \cos\left(-\frac{(n-2)\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{(n-2)\pi}{4}\right) \right)} = \\ &= (\sqrt{2})^2 \left( \cos\left(\frac{n\pi}{4} + \frac{(n-2)\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{n\pi}{4} + \frac{(n-2)\pi}{4}\right) \right) = \\ &= 2 \left( \cos \frac{(n-1)\pi}{2} + i \sin \frac{(n-1)\pi}{2} \right) = 2e^{i(n-1)\frac{\pi}{2}} = 2 \left( e^{i\frac{\pi}{2}} \right)^{n-1} = 2i^{n-1}. \end{aligned}$$

**Zadanie 3.24.** Przedstawić w postaci trygonometrycznej liczbę

$$z = 1 - \cos \alpha + i \sin \alpha, \quad \text{gdzie } 0 < \alpha < 2\pi.$$

**Rozwiązanie.** Mamy

$$|z| = \sqrt{(1 - \cos \alpha)^2 + \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - 2 \cos \alpha + \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} = \sqrt{2 - 2 \cos \alpha}.$$

Korzystając ze wzoru  $1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$  dostajemy

$$|z| = \sqrt{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = 2 \sin \frac{\alpha}{2},$$

z uwagi na dodatniość  $\sin \frac{\alpha}{2}$ , dla  $0 < \alpha < 2\pi$ . Wtedy

$$\cos \theta = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|} = \frac{1 - \cos \alpha}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} = \sin \frac{\alpha}{2}$$

oraz

$$\sin \theta = \frac{\operatorname{Im} z}{|z|} = \frac{\sin \alpha}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} = \cos \frac{\alpha}{2}.$$

Zatem

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

wobec czego

$$1 - \cos \alpha + i \sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \left[ \cos \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \right) \right].$$

**Zadanie 3.25.** Obliczyć  $\left( 1 - \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)^6$ .

**Rozwiązanie.** Korzystając ze wzoru wyprowadzonego w rozwiązaniu zadania 3.23 dla

$\alpha = \frac{\pi}{3}$  mamy

$$1 - \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = 2 \sin \frac{\pi}{6} \left[ \cos \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \right) \right] = \cos \left( \frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{3} \right).$$

Stąd

$$\left( 1 - \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)^6 = \cos \left( 6 \cdot \frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left( 6 \cdot \frac{\pi}{3} \right) = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1.$$

**Zadanie 3.26.** Obliczyć  $z = \sqrt[6]{-27}$ .

**Rozwiązanie.** Przedstawiamy liczbę  $-27$  w postaci trygonometrycznej

$$-27 = 27(\cos \pi + i \sin \pi). \quad (29)$$

Oznaczmy  $\sqrt[6]{-27} = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$ . Podnosząc tę równość do szóstej potęgi mamy

$$-27 = \rho^6(\cos 6\theta + i \sin 6\theta). \quad (30)$$

Z zestawienia równości (29) i (30) otrzymujemy  $\rho^6 = 27$ , czyli  $\rho = \sqrt[6]{27} = \sqrt{3}$ , oraz  $6\theta = \pi + 2k\pi$ , czyli  $\theta = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$ , gdzie  $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ . Podstawiając kolejno  $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$  otrzymujemy sześć różnych wartości  $\sqrt[6]{-27}$ :

$$\begin{aligned} z_0 &= \sqrt{3} \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = \sqrt{3} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \\ z_1 &= \sqrt{3} \left( \cos \left( \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} \right) \right) = \sqrt{3} \left( \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = \sqrt{3}i, \\ z_2 &= \sqrt{3} \left( \cos \left( \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} \right) \right) = \sqrt{3} \left( \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right) = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \\ z_3 &= \sqrt{3} \left( \cos \left( \frac{\pi}{6} + \frac{3\pi}{3} \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{6} + \frac{3\pi}{3} \right) \right) = \sqrt{3} \left( \cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} \right) = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \\ z_4 &= \sqrt{3} \left( \cos \left( \frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3} \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3} \right) \right) = \sqrt{3} \left( \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right) = -\sqrt{3}i, \\ z_5 &= \sqrt{3} \left( \cos \left( \frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{3} \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{3} \right) \right) = \sqrt{3} \left( \cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} \right) = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i. \end{aligned}$$

**Zadanie 3.27.** Rozwiązać równanie  $z^3 + 8 = 0$ .

**Rozwiązanie.** Rozwiązanie tego równania sprowadza się do wyznaczenia wszystkich wartości pierwiastka sześciennego z liczby  $-8$ . W tym celu zapiszmy ją w postaci trygonometrycznej

$$-8 = 8(\cos \pi + i \sin \pi).$$

Stąd poszukiwanymi pierwiastkami są liczby

$$z_k = \sqrt[3]{8} \left( \cos \left( \frac{\pi + 2k\pi}{3} \right) + i \sin \left( \frac{\pi + 2k\pi}{3} \right) \right), \quad k = 0, 1, 2.$$

Podstawiając kolejno  $k = 0, 1, 2$  otrzymujemy:

$$\begin{aligned} z_0 &= 2 \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 2 \left( \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 1 + \sqrt{3}i, \\ z_1 &= 2 \left( \cos \frac{\pi + 2\pi}{3} + i \sin \frac{\pi + 2\pi}{3} \right) = 2(\cos \pi + i \sin \pi) = -2, \\ z_2 &= 2 \left( \cos \frac{\pi + 4\pi}{3} + i \sin \frac{\pi + 4\pi}{3} \right) = 2 \left( \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right) = 2 \left( \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 1 - \sqrt{3}i. \end{aligned}$$

**Uwaga.** Równanie to możemy również rozwiązać korzystając ze wzoru na sumę sześcianów. Mamy wtedy

$$z^3 + 8 = 0 \quad \iff \quad (z + 2)(z^2 - 2z + 4) = 0.$$

Widać, że jednym z pierwiastków równania jest  $z_0 = -2$ . Pozostałe dwa wyznaczymy rozwiązując równanie

$$z^2 - 2z + 4 = 0.$$

Obliczamy wyróżnik

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 4 = 4 - 16 = -12.$$

Stąd  $\sqrt{\Delta} = \sqrt{-12} = 2\sqrt{3}i$  i poszukiwanymi pierwiastkami równania są:

$$z_1 = \frac{2 - 2\sqrt{3}i}{2} = 1 - \sqrt{3}i, \quad z_2 = \frac{2 + 2\sqrt{3}i}{2} = 1 + \sqrt{3}i.$$

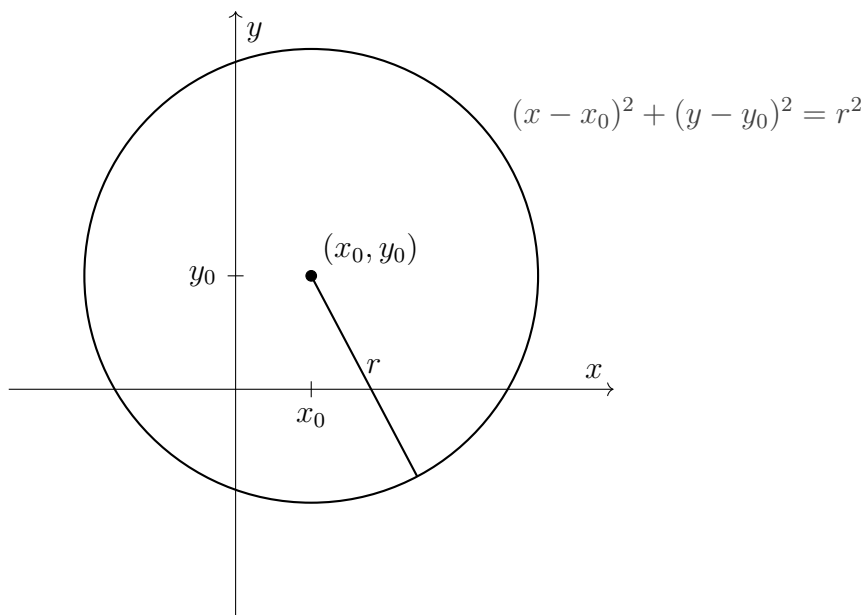
## Literatura

- [1] Długosz J., *Funkcje zespolone*, Teoria, przykłady, zadania, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław, 2002
- [2] Janowski W., Kaczmarski J., *Liczby i zmienne zespolone*, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa, 1986
- [3] Krysicki W., Włodarski L., *Analiza matematyczna w zadaniach*, część I, PWN, Warszawa, 2010

## 4. Geometria analityczna na płaszczyźnie

### 4.1 Okrąg

Niech  $O$  będzie dowolnym punktem płaszczyzny  $\mathbb{R}^2$ , a  $r$  dowolną liczbą rzeczywistą dodatnią. *Okregiem* o środku w punkcie  $O$  i promieniu  $r$  nazywamy zbiór wszystkich punktów płaszczyzny odległych od  $O$  o  $r$ .



Jeżeli punkt  $O$  ma współrzędne  $(x_0, y_0)$ , to punkt  $(x, y)$  leży w odległości  $r$  od  $O$  wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = r.$$

Ponieważ obie strony ostatniej równości są nieujemne, to można ją przepisać w sposób równoważny w postaci

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2. \quad (31)$$

Innymi słowy, zbiór wszystkich punktów  $(x, y)$  spełniających równanie (31) jest okręgiem o środku w punkcie  $(x_0, y_0)$  i promieniu  $r$ . Równanie to nazywamy *kanonicznym równaniem okręgu*.

Zauważmy, że równanie (31) można zapisać w postaci (zwanej postacią *ogólną* okręgu)

$$x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + z_0 = 0, \quad (32)$$

gdzie  $z_0 = x_0^2 + y_0^2 - r^2$ . Należy jednak mieć na uwadze, że nie każde równanie tego typu opisuje okrąg.

**Twierdzenie 4.1.** Dla ustalonych liczb rzeczywistych  $x_0$ ,  $y_0$  i  $z_0$  równanie (32) jest równaniem okręgu wtedy i tylko wtedy, gdy

$$x_0^2 + y_0^2 - z_0 > 0.$$

Jeżeli nierówność ta zachodzi, to równanie (32) opisuje okrąg o środku w punkcie  $(x_0, y_0)$  i promieniu  $\sqrt{x_0^2 + y_0^2 - z_0}$ .

*Dowód.* Mamy

$$x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + z_0 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - (x_0^2 + y_0^2 - z_0).$$

Przyjmując  $c = x_0^2 + y_0^2 - z_0$ , widzimy, że równość (32) zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = c.$$

Jeżeli  $c < 0$ , to równanie powyższe jest sprzeczne, gdyż jego lewa strona jest nieujemna. Gdy  $c = 0$ , to jedynym rozwiązaniem równania jest punkt  $(x_0, y_0)$ , gdzie  $x = x_0$  i  $y = y_0$ . Jeżeli natomiast  $c > 0$ , to możemy oznaczyć  $r = \sqrt{c}$ , otrzymując równanie okręgu  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$  o środku w punkcie  $(x_0, y_0)$  i promieniu  $r$ .  $\square$

**Zadanie 4.1.** Zbadaj, czy równanie

$$x^2 + y^2 + x - 2y + 1 = 0$$

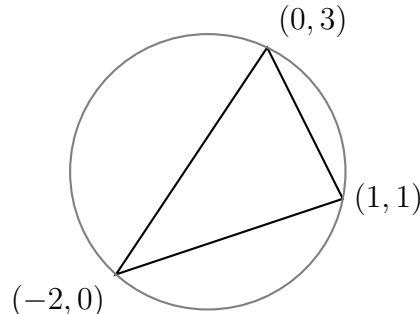
opisuje okrąg. Jeżeli tak, podaj jego środek i promień.

**Rozwiązanie.** Mamy w tym przypadku  $x_0 = -\frac{1}{2}$ ,  $y_0 = 1$  i  $z_0 = 1$ , więc

$$x_0^2 + y_0^2 - z_0 = \frac{1}{4} + 1 - 1 = \frac{1}{4}.$$

Z twierdzenia 4.1 wynika, że podane równanie opisuje okrąg o środku w punkcie  $(-\frac{1}{2}, 1)$  i promieniu  $\frac{1}{2}$ .

**Zadanie 4.2.** Podaj równanie okręgu opisanego na trójkącie o wierzchołkach w punktach  $(1, 1)$ ,  $(0, 3)$  i  $(-2, 0)$ .



**Rozwiązanie.** Wystarczy znaleźć takie liczby  $x_0$ ,  $y_0$  i  $z_0$ , aby dla każdego z podanych punktów spełnione było równanie (32). Innymi słowy, musimy rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} 2 - 2x_0 - 2y_0 + z_0 = 0, \\ 9 - 6y_0 + z_0 = 0, \\ 4 + 2x_0 + z_0 = 0. \end{cases}$$

Nietrudne, acz nużące, obliczenia dają rozwiązanie

$$\begin{cases} x_0 = -\frac{11}{10}, \\ y_0 = \frac{6}{5}, \\ z_0 = -\frac{9}{5}. \end{cases}$$

Otrzymujemy ostatecznie okrąg o środku w punkcie  $(-\frac{11}{10}, \frac{6}{5})$  i promieniu  $\sqrt{\frac{89}{20}}$ .

**Zadanie 4.3.** Napisz równanie okręgu, który ma ten sam środek co okrąg o równaniu

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$$

i przechodzi przez punkt  $(1, 2)$ .

**Rozwiązanie.** Podane równanie opisuje okrąg o środku w punkcie  $(1, -2)$ . Równanie szukanego okręgu jest więc postaci

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y + z_0 = 0.$$

Ponieważ punkt  $(1, 2)$  ma do tego okręgu należeć, to

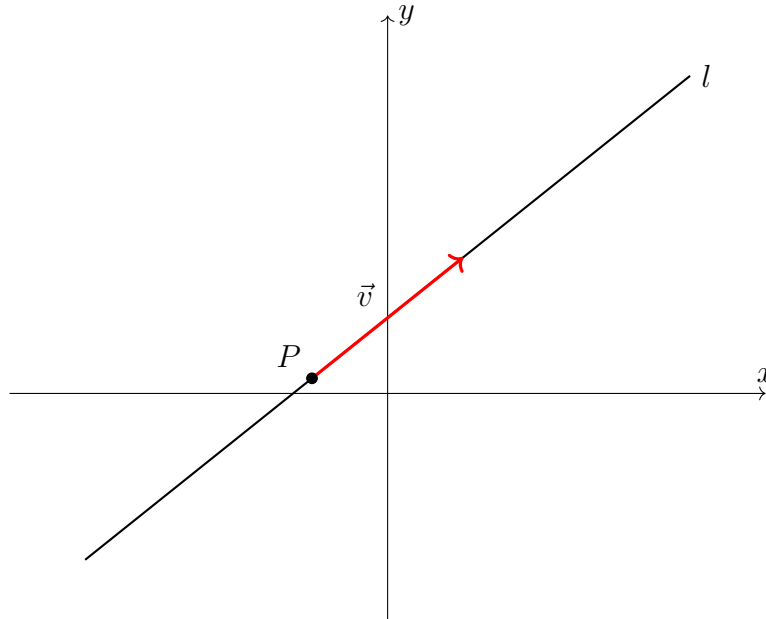
$$5 - 2 + 8 + z_0 = 0,$$

czyli  $z_0 = -11$ .  
[www.viacarpatia.pro](http://www.viacarpatia.pro)

## 4.2 Prosta

Dla ustalonego punktu  $P$  płaszczyzny  $\mathbb{R}^2$  oraz niezerowego wektora  $\vec{v}$  w tejże płaszczyźnie przez *prostą* o wektorze kierunkowym  $\vec{v}$  przechodzącą przez  $P$  rozumiemy będziemy zbiór

$$l = \{Q \in \mathbb{R}^2 : Q = P + t\vec{v}, t \in \mathbb{R}\}.$$



Jeżeli punkt  $P$  ma współrzędne  $(x_0, y_0)$  oraz  $\vec{v} = (a, b)$ , to  $Q = (x, y)$  spełnia równość  $Q = P + t\vec{v}$  wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\begin{cases} x = x_0 + at, \\ y = y_0 + bt. \end{cases}$$

Układ ten nazywamy równaniem *parametrycznym* prostej. Możemy też, przyrównując wartość parametru  $t$ , równanie parametryczne przepisać w postaci *kierunkowej*

$$l: \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}.$$

Zwracamy przy tym uwagę, że jest to tylko zapis formalny równania parametrycznego, gdyż może się zdarzyć, że  $a = 0$  lub  $b = 0$ .

**Twierdzenie 4.2.** Dla każdej prostej  $l$  w płaszczyźnie  $\mathbb{R}^2$  istnieją liczby rzeczywiste  $A$ ,  $B$  i  $C$ , dla których

$$l = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : Ax + By + C = 0\}.$$

*Dowód.* Załóżmy, że prosta  $l$  przechodzi przez (różne) punkty  $(x_1, y_1)$  oraz  $(x_2, y_2)$ . Jej wektorem kierunkowym jest zatem niezerowy wektor  $\vec{v} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ , a w konsekwencji prosta  $l$  ma równanie kierunkowe

$$l: \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Widzimy zatem, że punkt  $(x, y)$  leży na prostej  $l$  wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(x - x_1)(y_2 - y_1) = (y - y_1)(x_2 - x_1),$$

lub równoważnie

$$(y_2 - y_1)x + (x_1 - x_2)y + x_1(y_1 - y_2) + y_1(x_2 - x_1) = 0.$$

Wystarczy teraz przyjąć

$$A = y_2 - y_1, \quad B = x_1 - x_2, \quad C = x_1(y_1 - y_2) + y_1(x_2 - x_1).$$

□

Równanie

$$Ax + By + C = 0 \tag{33}$$

nazywamy równaniem *ogólnym* prostej  $l$ . Oczywiście dla każdej trójki  $(A, B, C)$  liczb rzeczywistych, przy czym  $A$  i  $B$  nie są jednocześnie równe 0, równanie (33) przedstawia pewną prostą. Powiemy, że dwie proste są *równoległe*, jeżeli mają równoległe wektory kierunkowe.

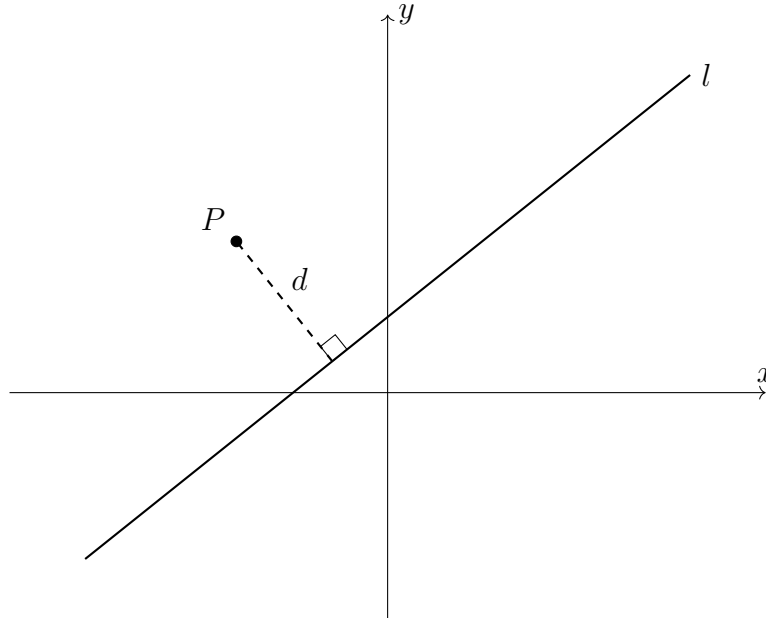
Warto również zauważyć, że wektor  $\vec{n} = (A, B)$  jest prostopadły do prostej o równaniu (33). Istotnie, z dowodu twierdzenia 4.2 wynika, że wektorem kierunkowym prostej  $l$  jest  $\vec{v} = (-B, A)$ . Iloczyn skalarny wektorów  $\vec{n}$  i  $\vec{v}$  jest równy zero, gdyż

$$\langle \vec{n}, \vec{v} \rangle = A(-B) + BA = 0,$$

co dowodzi prostopadłości  $\vec{n}$  i  $\vec{v}$ . Mówimy, że wektor  $\vec{n}$  jest wektorem *normalnym* prostej  $l$ .

**Zadanie 4.4.** Wyprowadź wzór na odległość punktu  $P = (x_0, y_0)$  od prostej

$$l: Ax + By + C = 0.$$



**Rozwiązanie.** Możemy założyć, że punkt  $P$  nie leży na prostej  $l$ . Wyznamy prostą  $l'$ , która przechodzi przez punkt  $P$  i jest prostopadła do prostej  $l$ . Wektorem normalnym prostej  $l$  jest  $\vec{v} = (A, B)$ , który jest jednocześnie wektorem kierunkowym prostej  $l'$ . Prosta  $l'$  dana jest zatem równaniem parametrycznym

$$l': \begin{cases} x = x_0 + At, \\ y = y_0 + Bt. \end{cases}$$

Wstawiając te wartości do równania prostej  $l$ , otrzymujemy

$$A(x_0 + At) + B(y_0 + Bt) + C = t(A^2 + B^2) + Ax_0 + By_0 + C = 0.$$

Oznacza to, że punktem przecięcia prostych  $l$  i  $l'$  jest  $P' = (x_0 + At_0, y_0 + Bt_0)$ , gdzie

$$t_0 = -\frac{Ax_0 + By_0 + C}{A^2 + B^2}.$$

Długość odcinka  $PP'$  jest równa

$$\sqrt{(x_0 + At_0 - x_0)^2 + (y_0 + Bt_0 - y_0)^2} = \sqrt{A^2t_0^2 + B^2t_0^2} = |t_0|\sqrt{A^2 + B^2}.$$

Ostatecznie, odległość punktu  $P$  od prostej  $l$  jest więc równa

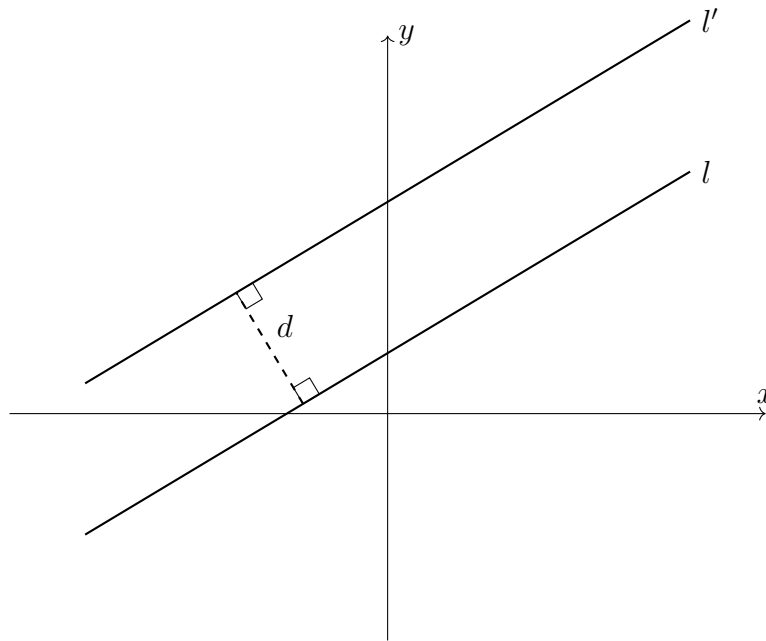
$$\frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Warto zauważyć, że wzór ten pozostaje prawdziwy dla punktu  $P$  leżącego na prostej  $l$ .

[www.viacarpatia.pro](http://www.viacarpatia.pro)

**Zadanie 4.5.** Wyznacz odległość między dwiema prostymi równoległymi o równaniach

$$l: Ax + By + C = 0, \quad l': Ax + By + C' = 0.$$



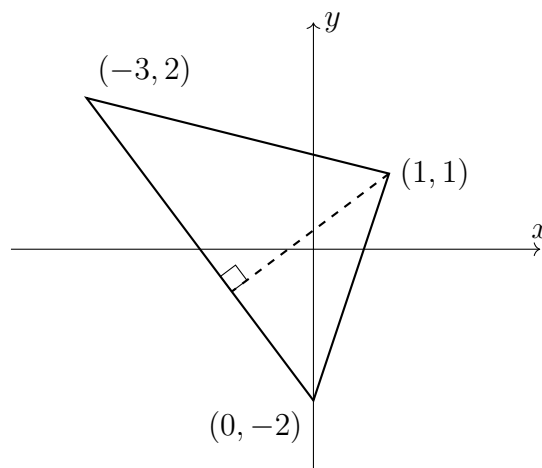
**Rozwiązanie.** Załóżmy, że punkt  $(x_0, y_0)$  leży na prostej  $l$ . Wtedy

$$Ax_0 + By_0 + C = 0.$$

Z poprzedniego zadania wiemy, że odległość punktu  $(x_0, y_0)$  od prostej  $l'$  wyraża się wzorem

$$\frac{|Ax_0 + By_0 + C'|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|C' - C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

**Zadanie 4.6.** Znajdź wysokość trójkąta o wierzchołkach  $A = (1, 1)$ ,  $B = (-3, 2)$  i  $C = (0, -2)$  opuszczoną z wierzchołka  $A$ .



**Rozwiązanie.** Wystarczy wyznaczyć odległość punktu  $A$  od prostej  $l$  przechodzącej przez punktu  $B$  i  $C$ . Wektorem kierunkowym tej prostej jest

$$\vec{v} = \vec{BC} = (3, -4),$$

więc

$$l: 4x + 3y + c = 0.$$

Skoro prosta  $l$  przechodzi przez punkt  $C$ , to

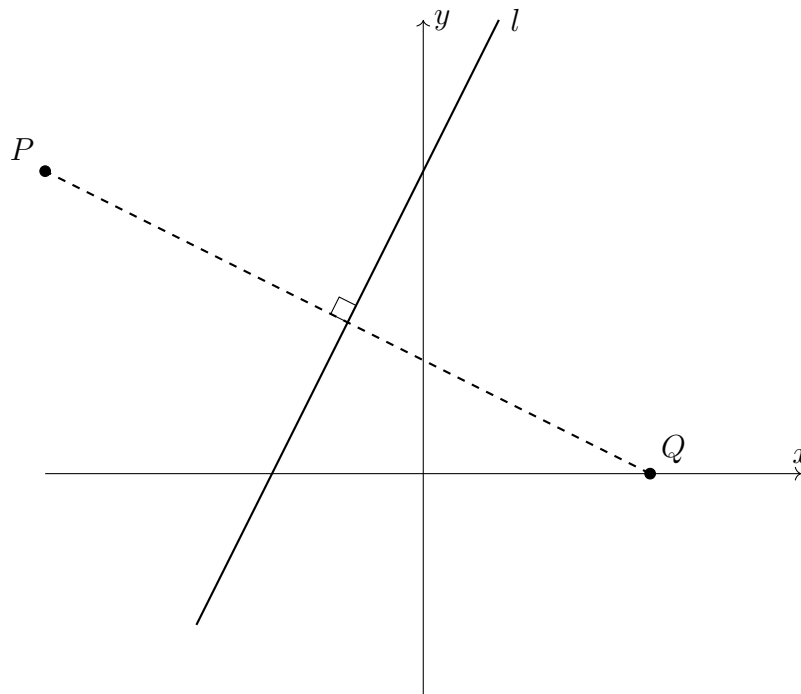
$$-6 + c = 0,$$

skąd  $c = 6$ . Ze wzoru na odległość punktu od prostej szukana wysokość ma długość

$$\frac{|4 + 3 + 6|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{13}{5}.$$

**Zadanie 4.7.** Znajdź punkt symetryczny do punktu  $P = (-5, 4)$  względem prostej

$$l: 2x - y + 4 = 0.$$



**Rozwiązanie.** Szukany punkt  $Q$  leży na prostej  $l'$  prostopadłej do  $l$  i przechodzącej przez punkt  $P$ . Prosta  $l'$  dana jest równaniem

$$l: x + 2y - 3 = 0.$$

Łatwo sprawdzić, że punktem przecięcia prostych  $l$  i  $l'$  jest  $R = (-1, 2)$ . Wystarczy zatem tak dobrać współrzędne punktu  $Q = (a, b)$ , aby punkt  $R$  był środkiem odcinka  $PQ$ . Mamy

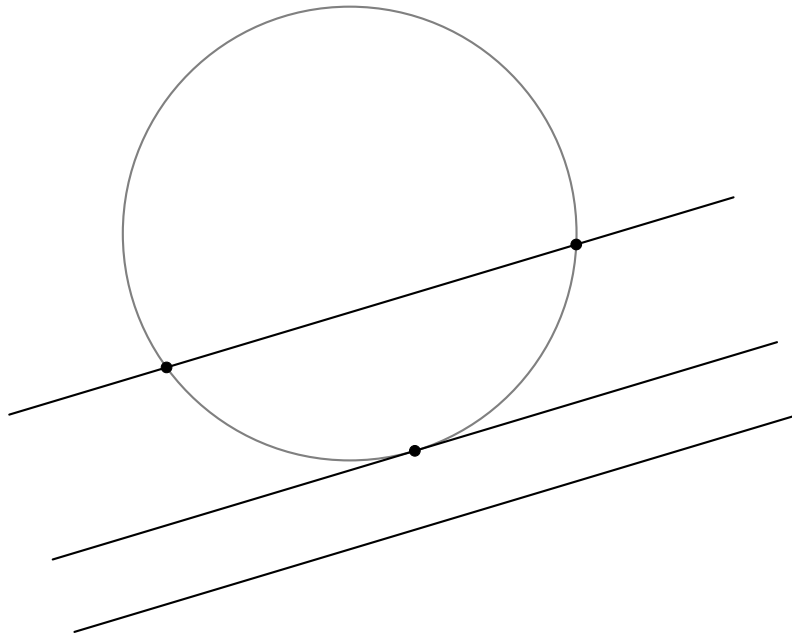
$$-1 = \frac{-5 + a}{2}, \quad 2 = \frac{4 + b}{2},$$

skąd

$$Q = (3, 0).$$

### 4.3 Prosta i okrąg

**Zadanie 4.8.** Uzasadnij, że dla dowolnego okręgu na płaszczyźnie każda prosta ma z tym okręgiem zero, jeden lub dwa punkty wspólne.



**Rozwiązanie.** Rozważmy okrąg o równaniu

$$x^2 + y^2 - 2x_0 - 2y_0 + z_0 = 0$$

oraz prostą o równaniu

$$l: Ax + By + C = 0.$$

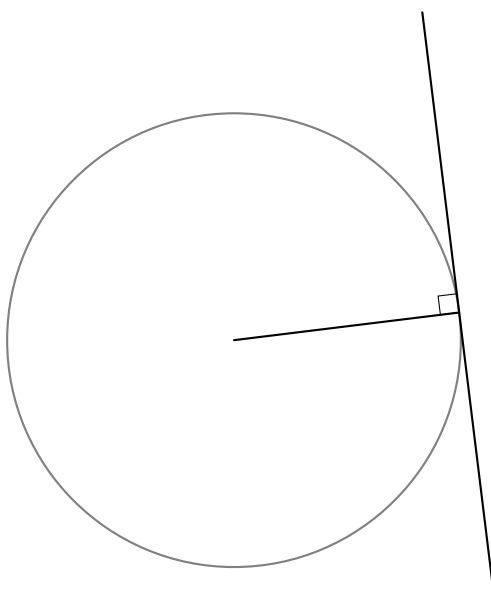
Przynajmniej jedna z liczb  $A$  lub  $B$  jest różna od zera. Załóżmy, dla ustalenia uwagi, że  $A \neq 0$ . Wtedy równanie prostej można zapisać w postaci

$$x = -\frac{By + C}{A}.$$

Wstawiając tę wartość do równania okręgu, otrzymujemy równanie kwadratowe z jedną niewiadomą  $y$ , które może mieć zero, jeden lub dwa pierwiastki. Każdemu z tych pierwiastków odpowiada dokładnie jedna wartość  $x$ , więc par  $(x, y)$  spełniających jednocześnie równanie okręgu i równanie prostej może być co najwyżej dwie.

Prostą, która dokładnie jeden punkt wspólny z okręgiem nazywamy *styczną* do okręgu.

**Zadanie 4.9.** Wykaż, że prosta styczna jest prostopadła do promienia poprowadzonego do punktu styczności.



**Rozwiązanie.** Załóżmy, że teza zadania nie jest prawdziwa, to znaczy, że prosta styczna  $l$  nie jest prostopadła do promienia. Oznaczmy środek okręgu przez  $O$ , a punkt styczności przez  $P$ . Poprowadźmy prostą prostopadłą  $l'$  do  $l$  i przechodzącą przez  $O$ . Oznaczmy ich punkt przecięcia przez  $Q$ . Trójkąt  $OPQ$  jest prostokątny, a jego przeciwprostokątną jest odcinek  $OP$ . Długość odcinka  $OP$  jest więc większa niż długość odcinka  $OQ$ . To jednak nie jest możliwe, gdyż punkt  $Q$  leży na zewnątrz okręgu (w przeciwnym razie prosta  $l$  miałaby z tym okręgiem dwa punkty wspólne). Otrzymana sprzeczność kończy dowód.

**Zadanie 4.10.** Napisz równanie okręgu przechodzącego przez punkt  $(1, 2)$ , do którego styczne są proste

$$l: x = 0, \quad l': y = 0.$$

**Rozwiązanie.** Ponieważ szukany okrąg jest styczny do osi układu współrzędnych, to ma on równanie

$$(x - r)^2 + (y - r)^2 = r^2$$

dla pewnego  $r > 0$ . Przechodzi on przez punkt  $(1, 2)$ , więc

$$(1 - r)^2 + (2 - r)^2 = r^2.$$

Po uproszczeniach, ostatnia równość jest równoważna równości

$$r^2 - 6r + 5 = 0.$$

Ma ona dwa rozwiązania,  $r = 1$  i  $r = 5$ . Istnieją zatem dwa okręgi o żądanej własności:

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1, \quad (x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 25.$$

