Zestaw 7

1. Rozwiąż w zbiorze liczb zespolonych równania:

a) $z^2 = i$,

b) $z^2 - z + 1 = 0$,

c) $z^2 - 5z + 4 + 10i = 0$,

d) $z^2 + (2i + 7)z + 6 + 3i = 0$,

e) $z^2 + 3\bar{z} = 0$.

2. Przedstaw w postaci trygonometrycznej/wykładniczej liczby:

a) $-2i$,

b) $-1 - \sqrt{3}i$,

c) $-1 + i$,

d) 8.

3. Przedstaw w postaci algebraicznej liczby:

a) $(1 - \sqrt{3}i)^{150}$,

b) $\left[(1 - i)(-1 + \sqrt{3}i)\right]^{1000}$.

4. Wykorzystując wzór de Moivere'a-Laplace'a wyraź $\sin(4x)$ i $\cos(4x)$ przez $\sin x$ i $\cos x$.

5. Zaznacz na płaszczyźnie zespolonej zbiory liczb spełniających warunki:

a) $|z - 1 + 3i| = 2$,

b) $\Im[(1 + 2i)z - 3i] < 0$,

c) $1 < |z + i| \leqslant 2$,

d) $|(1 - i)z - 1| \geqslant 3$,

e) $\left|\dfrac{z + 3}{z - 2i}\right| \geqslant 1$,

f) $|z^2 + 4| \leqslant |z - 2i|$,

g) $\mathrm{Re}(z^3) \geqslant 0$,

h) $\pi/2 \leqslant \arg(z^3) \leqslant \pi$.

6. Rozwiąż w zbiorze liczb zespolonych równania:

a) $(\bar{z})^6 = 4|z^2|$,

b) $\dfrac{|z|^2 z}{(\bar{z})^3} = -1$.

7. Uzasadnij, że dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ zachodzą równości

$$\sin x = \frac{\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{-ix}}{2i}, \qquad \cos x = \frac{\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{-ix}}{2},$$

a następnie wyraź $\sin^3 x$ i $\cos^3 x$ przez funkcje sinus i kosinus wielokrotności kąta x.

8. Wyznacz pierwiastki zespolone:

a) $\sqrt{4i - 3}$,

b) $\sqrt[3]{-8}$,

c) $\sqrt[4]{-1 + \sqrt{3}i}$.

9. Znajdź pierwiastki wielomianów danych wzorami:

a) $z^7 + 4z^4 + z$,

b) $z^4 - iz^2 + 2$.

10. Uzasadnij, że każdy wielomian o współczynnikach rzeczywistych można przedstawić w postaci iloczynu wielomianów o współczynnikach rzeczywistych stopni co najwyżej dwa.