Zestaw 6

1. Wykorzystując definicję całki Riemanna, oblicz granice:

a) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{3n}\right)$, b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

2. Oblicz całki oznaczone:

a) $\displaystyle\int_0^3 |1-x|\,\mathrm{d}x$, b) $\displaystyle\int_3^4 |\ln(x-\mathrm{e})|\,\mathrm{d}x$.

3. Załóżmy, że funkcja f jest ciągła i parzysta na przedziale $[-a,a]$ dla pewnego $a\in\mathbb{R}$. Uzasadnij, że

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x.$$

4. Załóżmy, że funkcja f jest ciągła i nieparzysta na przedziale $[-a,a]$ dla pewnego $a\in\mathbb{R}$. Uzasadnij, że

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

5. Załóżmy, że funkcja f jest ciągła na przedziale $[a,b]$. Uzasadnij, że

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(a+b-x)\,\mathrm{d}x.$$

6. Załóżmy, że dla pewnej funkcji ciągłej $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ i dowolnego $a\in\mathbb{R}$ zachodzi

$$\int_{a-1}^{a+1} f(x)\,\mathrm{d}x = 2025.$$

Uzasadnij, że funkcja f jest okresowa.

7. Oblicz pole obszaru ograniczonego krzywymi:

a) $y=2x-x^2$, $y=-x$, b) $y=\frac{x^2}{2}$, $y=\frac{x^2}{4}$, $y=4$ dla $x\geqslant 0$.

8. Oblicz długość krzywej

$$y=\ln\frac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^x-1}\qquad \text{dla } \frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1.$$

9. Oblicz objętość bryły powstałej przez obrót krzywej

$$y=\operatorname{tg} x,\qquad 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}$$

dookoła osi $\mathrm{O}x$.

10. Oblicz pole powierzchni powstałej przez obrót dookoła osi $\mathrm{O}x$ krzywej

$$y=2x^3,\qquad 0\leqslant x\leqslant 1.$$

11. Oblicz całki niewłaściwe:

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$,

b) $\displaystyle\int_0^{1/\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln^2 x}\,\mathrm{d}x$,

c) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{1+(\operatorname{tg} x)^{\sqrt{2}}}\,\mathrm{d}x$.