Zestaw 4

1. Wyznacz:

a) $\sqrt{\mathrm{e}}$ z dokładnością 10^{-2},

b) $\ln 1.1$ z dokładnością 10^{-3}.

2. Wykorzystując wzór Taylora dla funkcji $x \mapsto \mathrm{e}^x$, uzasadnij, że liczba e jest niewymierna.

3. Oblicz granice:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x - e^{-x}}{x}$,

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x}\ln x$,

c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\pi - \operatorname{arc\,tg} x}{\ln(x+1) - \ln x}$,

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$

e) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{x-1}\right)$,

f) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$,

g) $\lim\limits_{x\to 1^-} \cos\dfrac{\pi}{2x}\ln(1-x)$,

h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3 \sin\frac{1}{x}}{\sin^2 x}$,

i) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x^2} - \operatorname{ctg} x\right)$,

j) $\lim\limits_{x\to +\infty} x\left[\mathrm{e} - \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x\right]$.

4. (*) Wykorzystując wzór Taylora, oblicz granicę

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\sin(\sin x) - \sin^2 x}{\operatorname{tg}^6 x}.$$

Spróbuj wyznaczyć tę granicę przy pomocy reguły de l'Hospitala.

5. Wykorzystując metodę stycznych, dla ustalonego $a > 0$ skonstruuj ciąg zbieżny do a^{-1}. Oblicz kilka pierwszych przybliżeń dla $a = 7$.

6. Wykorzystując metodę stycznych, dla ustalonego $a > 0$ skonstruuj ciąg zbieżny do $a^{-1/2}$. Oblicz kilka pierwszych przybliżeń dla $a = 5$.

7. Oblicz przybliżoną wartość liczby π, wykorzystując fakt, że jest ona rozwiązaniem równania $\operatorname{tg}\frac{x}{4} = 1$.