Zestaw 2

1. Uzasadnij, że jeśli wielomian stopnia n ma n różnych pierwiastków rzeczywistych, to jego pochodna ma dokładnie $n-1$ różnych pierwiastków rzeczywistych.

Wskazówka: Wielomian ma co najwyżej tyle pierwiastków, ile wynosi jego stopień.

2. Niech $a > 0$ i załóżmy, że $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą na $[a,b]$ oraz różniczkowalną w (a,b). Ponadto funkcja f spełnia warunek

$$bf(a) = af(b).$$

Wykaż, że w przedziale (a,b) istnieje takie c, że

$$f(c) = cf'(c).$$

3. Załóżmy, że $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją różniczkowalną oraz

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 1.$$

Udowodnij, że

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1.$$

4. Niech $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą na $[0,1]$ i różniczkowalną w $(0,1)$. Załóżmy, że $f(0) = 0$ oraz

$$|f'(x)| \leqslant |f(x)|, \qquad x \in (0,1).$$

Uzasadnij, że $f(x) = 0$ dla dowolnego $x \in [0,1]$.

5. Zbadaj monotoniczność i znajdź ekstrema lokalne funkcji danych wzorami (w ich dziedzinach naturalnych). Naszkicuj ich wykresy:

a) $\dfrac{x^2 - 6x + 13}{x-3}$,

b) $\dfrac{x^2 + x + 1}{x^2 - 1}$,

c) $x \ln^2 x$,

d) $\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$,

e) $x - 2\operatorname{arc\,tg} x$,

f) $x^2 \mathrm{e}^{1/x}$,

g) $\mathrm{e}^{(2-x^2)/(x^2-1)}$,

h) $\frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$.

6. Wykaż, że zachodzą nierówności

a) $x - \dfrac{x^3}{6} < \sin x < x$ dla dowolnego $x > 0$,

b) $\dfrac{x}{1+x} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$ dla dowolnego $x > -1$.

7. Wykaż, że dla dowolnego $x \in (0, \pi/2)$ zachodzą nierówności

a) $\sin x > \dfrac{2}{\pi} x$,

b) $\operatorname{tg} x > x + \dfrac{x^3}{3}$,

c) $\operatorname{tg} x > x^3$.

8. Która z liczb jest większa, e^π czy π^e?