

Zestaw 1

1. Niech funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dana wzorem

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Sprawdź, czy jest ona różniczkowalna w każdym punkcie i oblicz jej pochodną.

2. Niech funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dana wzorem

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Sprawdź, czy jest ona różniczkowalna w każdym punkcie i oblicz jej pochodną.

3. Przy założeniu, że pochodna funkcji f w punkcie x_0 istnieje, oblicz granicę

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}.$$

Czy z istnienia tej granicy wynika istnienie pochodnej $f'(x_0)$?

4. Znajdź styczną do hiperboli $y = \frac{x}{x+1}$ w punkcie $x = 1$.

5. Znajdź wszystkie styczne do hiperboli $y = \frac{x}{x+1}$ przechodzące przez punkt o współrzędnych $(2, 2)$.

6. Na paraboli $y = x^2$ zaznaczono dwa punkty o odciętych $x_1 = 1$ i $x_2 = 3$. Wyznacz równanie stycznej do tej paraboli, która jest równoległa do secznej przechodzącej przez te punkty.

7. Parabola o równaniu $y = ax^2 + bx + c$ przechodzi przez punkt $(1, 2)$ i jest styczna do prostej $y = x$ w początku układu współrzędnych. Znajdź wartości a , b i c .

8. Rozważmy dowolną styczną do hiperboli $y = \frac{3}{x}$. Sprawdź, że odcinek tej stycznej zawarty między osiami współrzędnych dzieli się na połowy w punkcie styczności.

9. Znajdź wszystkie styczne do paraboli $y = x^2 - x$, przechodzące przez punkt o współrzędnych $(1, -1)$.

10. Udowodnij, że styczna do krzywej $y = x^3$ w dowolnym punkcie $A(a, a^3)$ dla $a > 0$ przecina się z tą krzywą w jeszcze jednym punkcie, w którym nachylenie wykresu jest cztery razy większe od nachylenia w A .

11. Wykorzystując wzór na pochodną funkcji $x \mapsto x^n$ dla $n \in \mathbb{N}$, wyprowadź wzór na pochodną funkcji $x \mapsto \sqrt[n]{x}$.

12. Ze wzoru na pochodną funkcji odwrotnej wyprowadź wzór na pochodną $\arctan$.