

$$\frac{a}{b} = a \cdot \frac{b^{-1}}{?} \quad \left\{ \begin{array}{l} b^{-1} \bmod n \\ b \cdot b^{-1} = 1 \end{array} \right.$$

$$A, B \in \mathbb{R}_{n \times n}$$

$$\frac{A}{B} \stackrel{\text{def}}{=} A \cdot \frac{B^{-1}}{?} \quad \iff B \cdot B^{-1} = I_n$$

Macierz odwrotna

Niech A będzie macierzą kwadratową wymiaru $n \times n$. Jeżeli istnieje macierz B , spełniająca warunek

$$AB = BA = I_n,$$

to nazywamy ją **macierzą odwrotną** do macierzy A . Piszemy wtedy

$$B = A^{-1}.$$

- Kiedy istnieje A^{-1} ? A^{-1} istnieje $\Leftrightarrow \text{rz} A = n$
- Czy A^{-1} jest wyznaczone jednoznacznie?
 $AB = BA = I = AC = CA$
 $B = B \cdot I = B(AC) = (BA)C = IC = C$
- Jak wyznaczyć A^{-1} ?

Algorithm Gauss

$$\begin{array}{c} Ax = b \\ \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ m \times n \quad n \times 1 \quad m \times 1 \end{array}$$

$$\left[A \mid b \right] \xrightarrow[\text{normiert}]{\text{op. el.}} \left[I \mid b' \right]$$

$$\Downarrow \\ x = b'$$

$$\left[A \mid I \right] \xrightarrow[\text{normiert}]{\text{op. el.}} \left[I \mid B \right]$$

$$\Downarrow \\ A^{-1} = B$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \textcircled{-1} & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{u_3 + u_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \textcircled{6} & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

A

$$\begin{array}{l} u_3 - u_2 \\ \longrightarrow \\ u_2 \leftrightarrow u_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & \textcircled{5} & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{u_3 - 5u_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -5 & 6 & -5 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{l} u_3 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \\ \longrightarrow \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & \textcircled{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \textcircled{1} & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{4} & -\frac{6}{4} & \frac{5}{4} \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} u_2 - u_3 \\ u_1 - 2u_3 \end{array}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \textcircled{3} & 0 & -\frac{6}{4} & \frac{12}{4} & -\frac{10}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{2}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{4} & -\frac{6}{4} & \frac{5}{4} \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{u_1 - 3u_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{4} & \frac{6}{4} & -\frac{7}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{2}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{4} & -\frac{6}{4} & \frac{5}{4} \end{array} \right]$$

$I_n \qquad A^{-1}$

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -3 & 6 & -7 \\ -1 & 2 & -1 \\ 5 & -6 & 5 \end{bmatrix}$$

Wyznacznik (determinant)

$\mathbb{R}^{n \times n}$

$\mathbb{R}$

$\downarrow$

$\downarrow$

$$A \mapsto a$$

$$\det(A) = a = |A| = a$$

Def. Wyznacznik (def. przez postać schodkową)
 Jeżeli A jest macierzą zapisaną w postaci schodkowej, czyli

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix},$$

to

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}.$$

Op. dla wyznacznika:

1) $u_i \cdot c$

$$A \xrightarrow{u_i \cdot c} A'$$

$$\det(A') = c \cdot \det A$$

2) $u_i \leftrightarrow u_j$
 $i \neq j$

$$A \xrightarrow{u_i \leftrightarrow u_j} A'$$

$$\det(A') = -\det A$$

3) $u_i + u_j \cdot c$

$$A \xrightarrow{u_i + u_j \cdot c} A'$$

$$\det(A') = \det A$$

Przy liczeniu wyznaczników możemy wykorzystać operacje elementarne na wierszach!

1) $1 \times 1 \quad \det([a]) = a$

2) $2 \times 2 \quad \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$

3) 3×3 Metoda Sarrusa (tylko dla 3×3)

$\det \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} =$

$$= aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi$$

4) Rozwinięcie Laplace'a

$A \quad n \times n$, j - ustalony numer kolumny

$$\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(A_{i,j})$$

↑
Macierz powstała z macierzy A
po usunięciu i -tego
wiersza i j -tej kolumny.

i - ustalony numer wiersza

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(A_{i,j})$$

Metoda Cramera rozwiązywania układów równań

$$Ax = b$$

$$A \in \mathbb{R}_{n \times n}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Ax = b \quad | \quad A^{-1} \cdot \\ A^{-1}(Ax) = A^{-1}b \\ (A^{-1}A)x = A^{-1}b \\ x = A^{-1}b \end{array} \right.$$

Tw. Cramera. Jeżeli $\det A \neq 0$, to układ

$$Ax = b$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie

$$x = \begin{bmatrix} \frac{\det A_1}{\det A} \\ \vdots \\ \frac{\det A_n}{\det A} \end{bmatrix}$$

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}, \quad i=1, \dots, n$$

A_i - macierz powstała z macierzy A przez zastąpienie i -tego wiersza przez wiersz b

$$\begin{cases} x + y + z = 5 \\ 2x + 2y + 7z = 30 \\ 3x + y + 5z = 25 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 7 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 5 \\ 30 \\ 25 \end{bmatrix}$$

Laplace

$$\det A = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \det \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 1 \cdot \det \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot 1 \cdot \det \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= (2 \cdot 5 - 7 \cdot 1) - (2 \cdot 5 - 7 \cdot 3) + (2 \cdot 1 - 2 \cdot 3) =$$

$$= 10$$

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 30 & 2 & 7 & 30 & 2 \\ 25 & 1 & 5 & 25 & 1 \end{vmatrix} = 50 + 175 + 30 - 50 - 35 - 150 = 20$$

$$x = \frac{20}{10} = 2$$

Laplace

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 30 & 7 \\ 3 & 25 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} u_2 - 2u_1 \\ = \\ u_3 - 3u_1 \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0 & 20 & 5 \\ 0 & 10 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 20 & 5 \\ 10 & 2 \end{vmatrix} + 0 + 0 =$$

$$= 20 \cdot 2 - 5 \cdot 10 = -10 \Rightarrow y = \frac{-10}{10} = -1$$

$$\det A_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & 30 \\ 3 & 1 & 25 \end{vmatrix} \begin{matrix} u_2 - 2u_1 \\ = \\ u_3 - 3u_1 \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 20 \\ 0 & -2 & 10 \end{vmatrix} \begin{matrix} u_2 \leftrightarrow u_3 \\ = \end{matrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & 10 \\ 0 & 0 & 20 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-40) = 40$$

$$z = \frac{40}{10} = 4$$

2. A^{-1} istnieje $\Leftrightarrow \det A \neq 0$.

(macierz A jest nieosobliwa)

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -3 & 1 & -6 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \stackrel{k_3 - 2k_1}{=} \det \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \left[(-1)^{i+j} \det A_{ij} \right]^T$$

← macierz
transponowana
(wiersze stają
się kolumnami)

3. Tw. Cauchy'ego

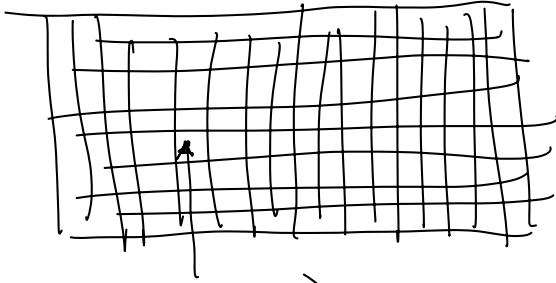
$$A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$$

Geometria i grafika

GRAFIKA

BITMAPOWA



(a, b, c)
R G B

WEKTOROWA (opis matematyczny)

- punkty
- proste
- okręgi
- odcinki
- krzywe
- przekształcenia

