

Macierze

Macierzą wymiaru $m \times n$ nazywamy tablicę liczb rzeczywistych lub zespolonych postaci

licze
wierszy

licze kolumn

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= A = [a_{ij}]_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}}$$

Zbiór macierzy $m \times n$ oznaczamy przez

$$\mathbb{R}_{m \times n} \quad \text{lub} \quad \mathbb{C}_{m \times n}.$$

$$= [a_{ij}] =$$

$$= (a_{ij})_{i,j}$$

$$A, B$$

$$A+B$$

$$A \cdot B$$

Dodawanie macierzy

Jeżeli $A = [a_{ij}]$ i $B = [b_{ij}]$ są macierzami tego samego wymiaru, to ich sumę definiujemy wzorem

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}].$$

$$\begin{matrix} 2 \times 4 \\ \left[\begin{array}{cccc} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right] \end{matrix} + \begin{matrix} 2 \times 4 \\ \left[\begin{array}{cccc} -1 & 1 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & 3 \end{array} \right] \end{matrix} = \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 3 & -1 & 3 \end{array} \right]$$

Mnożenie macierzy przez liczbę

Jeżeli A jest macierzą, a c liczbą rzeczywistą/zespoloną, to iloczyn cA definiujemy wzorem

$$cA = [ca_{ij}].$$

$$3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A - B = A + (-B) = A + ((-1) \cdot B)$$

Własności działań

Dla dowolnych macierzy A , B i C oraz dowolnych liczb c i d zachodzą wzory (o ile tylko podane działania można wykonać):

$$\rightsquigarrow A + B = B + A$$

przemienność
Łączność

$$\rightsquigarrow A + (B + C) = (A + B) + C$$

$$\rightsquigarrow cA = Ac$$

$$\rightsquigarrow c(A + B) = cA + cB$$

rozdzielność

$$\rightsquigarrow (c + d)A = cA + dA$$

$$\rightsquigarrow (cd)A = c(dA)$$

$$A \cdot B = ?$$

~~$$A, B \quad m \times n$$~~

~~$$A \cdot B = [a_{ij} \cdot b_{ij}]$$~~

~~$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$~~

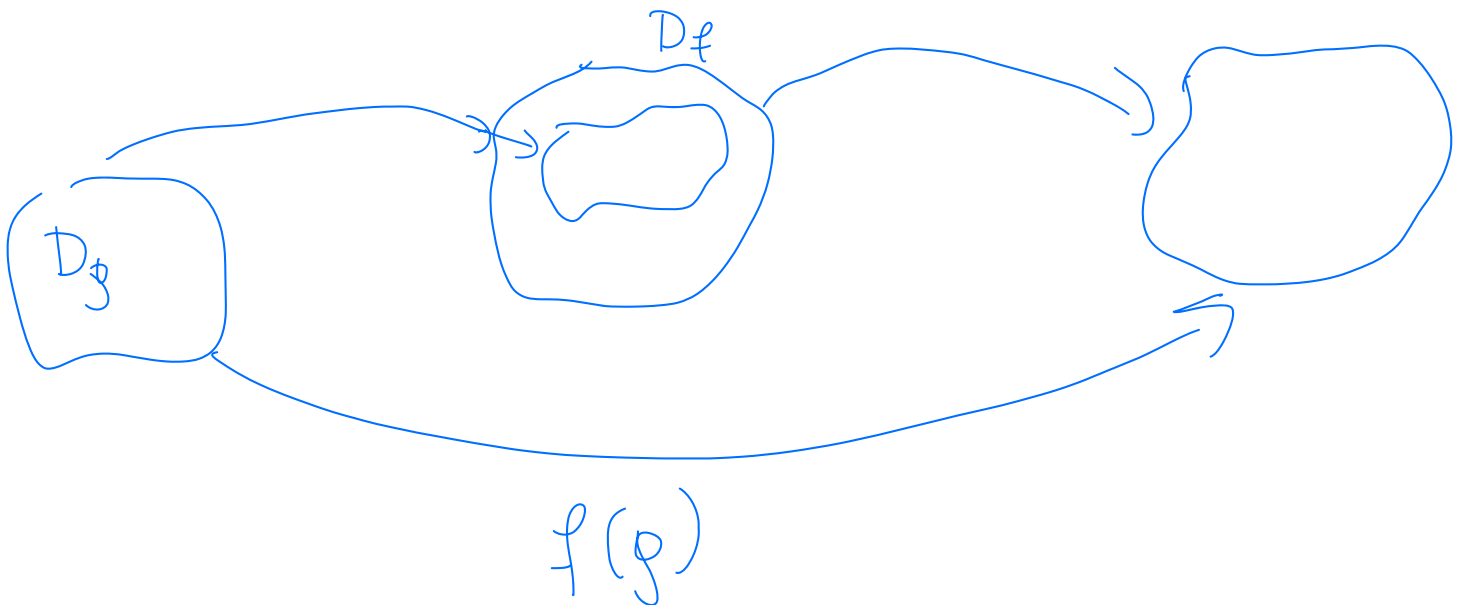
$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

$A \iff$ predstaviteľné lineárne $\mathbb{R}^d$

$A \iff$ funkcia

$A \cdot B \iff$ skladanie funkcií

$f(g)$

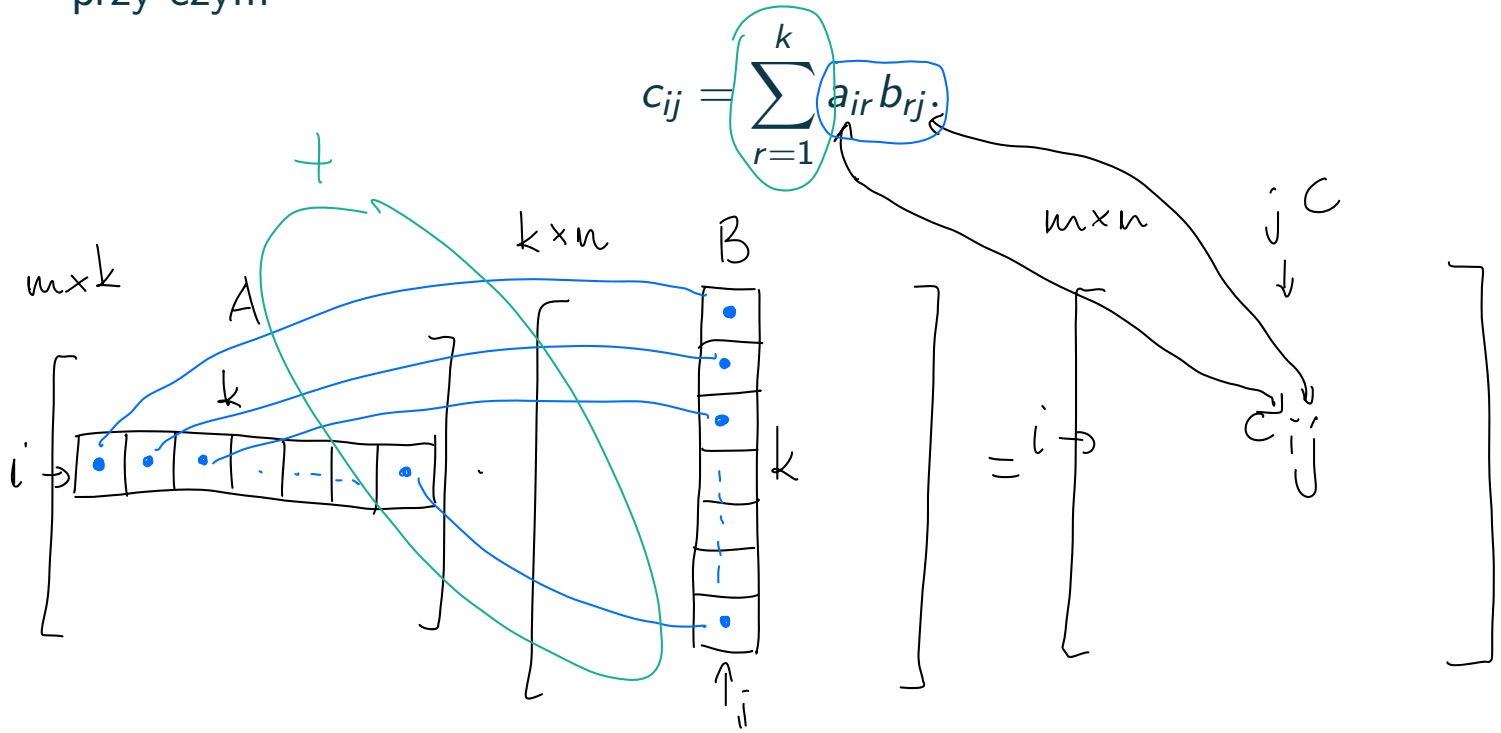


Mnożenie macierzy

Jeżeli A jest macierzą wymiaru $m \times k$, a B macierzą wymiaru $k \times n$, to iloczyn AB definiujemy jako macierz wymiaru $m \times n$ wzorem

$$AB = [c_{ij}],$$

przy czym



$$\begin{array}{c} \textcircled{2} \times \textcircled{3} \\ \left[\begin{array}{ccc} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{array} \right] \end{array} \begin{array}{c} \textcircled{3} \times \textcircled{3} \\ \left[\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{array} \right] \end{array} = \begin{array}{c} 2 \times 3 \\ \left[\begin{array}{ccc} \boxed{-1} & \boxed{-1} & \boxed{-4} \\ \boxed{3} & \boxed{1} & \boxed{2} \end{array} \right] \end{array}$$

Własności iloczynu macierzy

Dla dowolnych macierzy A , B i C oraz dowolnej liczby c zachodzą wzory (o ile tylko podane działania można wykonać):

$$\rightsquigarrow A(B + C) = AB + AC$$

$$\rightsquigarrow (A + B)C = AC + BC$$

$$\rightsquigarrow c(AB) = (cA)B = A(cB)$$

$$AB = [e_{ij}]$$

$$\rightsquigarrow A(BC) = (AB)C = ABC$$

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{ccc} A & m \times k & B \quad k \times n \quad C \quad n \times l \\ & & BC \end{array} \right] \\ & A \cdot \underbrace{\left[\sum_{r=1}^n b_{ir} c_{rj} \right]}_{d_{ij}} = \left[\sum_{s=1}^k a_{is} d_{sj} \right] = \left[\sum_{s=1}^k a_{is} \sum_{r=1}^n b_{sr} c_{rj} \right] = \\ & = \left[\sum_{i=1}^m \sum_{s=1}^k a_{is} b_{sr} c_{rj} \right] = \left[\sum_{r=1}^n \underbrace{\left(\sum_{s=1}^k a_{is} b_{sr} \right)}_{e_{ir}} c_{rj} \right] = (AB)C \end{aligned}$$

~~$$A \cdot B = B \cdot A$$~~

$$\begin{matrix} A & B \\ m \times k & k \times n \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} B & A \\ k \times n & m \times k \end{matrix}$$

$$\cdot$$

$$m \times n$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{A}{B} = A \cdot B^{-1}$$

$$\begin{matrix} \uparrow \\ B^{-1} B = I \end{matrix}$$

Macierz jednostkowa

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_n = \begin{matrix} & n \times n \\ \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{I} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}$$

$$\mathbf{A} \quad m \times n$$

$$\mathbf{I}_m \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{I}_n = \mathbf{A}$$

(Nie)Przemienność mnożenia

Mnożenie macierzy na ogół **nie jest** przemienne!

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

↑
zwykle

2 Toionoid obkleniova ilocayn mactery

A B $A \cdot B$
 $m \times k$ $k \times n$ $m \times n$

$m \cdot n$ elementov

$\uparrow$ $k-1$ dodavai (tanie)
 k mnozhen (drogie)

$A \cdot B \rightarrow \underline{m \cdot n \cdot k}$ mnozhen

A, B $n \times n$

$A \cdot B \rightarrow n^3$ mnozhen

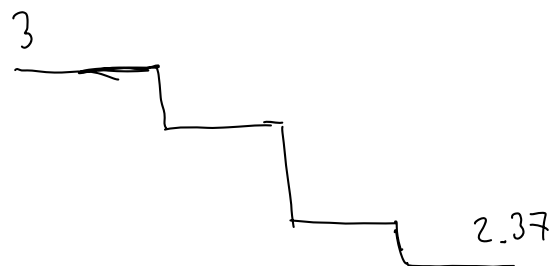
1969 Strassen n 2.807...

1980 Schönhage n 2.5...

1990 Coppersmith n 2.375...

2024 Winograd n 2.37...

2025 ... n 2.371...



$O(n^\alpha)$

$$n^2 \leq n^\alpha \leq n^3$$

DeepMind

AlphaTensor 2022

AlphaEvolve 2025

4×4 4×4
 47

4×4 4×4
 $49 \rightarrow 48$

$\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$

$\mathbb{R}$

~ 14000

1960 Karatsuba

x
 $\downarrow$
 n bits

y
 $\downarrow$
 n bits

$$xy \leftarrow n^2 \text{ multiplies}$$

$$\begin{array}{r}
 2 \\
 13 \\
 \cdot 29 \\
 \hline
 117 \\
 26 \\
 \hline
 377
 \end{array}$$

$$\overline{ab} = 10a + b$$

$$\overline{cd} = 10c + d$$

$$\begin{aligned}
 \overline{ab} \cdot \overline{cd} &= (10a + b)(10c + d) = \\
 &= 100\underline{ac} + 10\underline{ad} + 10\underline{bc} + \underline{bd} =
 \end{aligned}$$

$$(a + b)(c + d) = \underline{ac} + \underline{ad} + \underline{bc} + \underline{bd}$$

$$\underline{ad} + \underline{bc} = (a + b)(c + d) - \underline{ac} - \underline{bd}$$

$$= 100ac + 10(\underline{ad} + \underline{bc}) + \underline{bd} =$$

$$= 100\underline{ac} + 10\left[\underline{(a+b)(c+d)} - \underline{ac} - \underline{bd}\right] + \underline{bd}$$

$$\begin{array}{cc}
 13 & 29 \\
 \underline{ab} & \underline{cd}
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 100 \cdot 2 + 10 \left[4 \cdot 11 - 2 - 27 \right] + 27 &= \\
 = 200 + 10 \cdot (15) + 27 &= \boxed{377}
 \end{aligned}$$

$$(a_1 a_2 \dots a_n) (b_1 b_2 \dots b_n)$$

Karatsuba

$x y$

$\rightsquigarrow$

$$n^{\overbrace{\log_2 3}^{1.58\dots}} \text{ multipl.}$$

Strassen

def. $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ multipl.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$$

$\nearrow$

$\searrow$

$$\boxed{7 \text{ multipl.}}$$

$$\boxed{\begin{matrix} \text{CU} \\ \text{!} \end{matrix}}$$

Kolejność mnożeń

$$(AB)C = A(BC)$$

\ /
co ma mniej mnożeń?

Liczba mnożeń

$$A \quad 20 \times 2$$

$$B \quad 2 \times 10$$

$$C \quad 10 \times 2$$

$$(AB)C = \underbrace{20 \cdot 2 \cdot 10}_{AB} + 20 \cdot 10 \cdot 2 = 800$$

↑
 20×10

$$A(BC) = \underbrace{2 \cdot 10 \cdot 2}_{BC} + 20 \cdot 2 \cdot 2 = 120$$

↓
 2×2

Problem optymalnego nawiasowania

$$A_1 A_2 \dots A_n$$

$$\left. \begin{array}{l} (A_1 A_2) \dots A_n \\ (A_1 (A_2 A_3) \dots) A_n \\ \vdots \end{array} \right\}$$

Liaby Catalan

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} \sim \frac{4^n}{n^{3/2}}$$

$$C_3 = \frac{1}{4} \cdot \binom{6}{3} = 5$$

$$\frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{2 \cdot 3}$$

C_n - linie sąsiad nawiasowań $n+1$ modułu.

$$((AB)C)D \quad (AB)(CD) \quad A((BC)D) \quad A(B(CD)) \quad (A(BC))D$$

Własność optymalnej podstruktury

W optymalnym nawiasowaniu iloczynu

$$A_1 \dots A_n$$

każdy blok

$$A_i \dots A_j$$

powinien być nawiasowany według optymalnego nawiasowania tego bloku.

$$(A_1) \dots (A_i \dots A_j) \dots (A_k)$$

k_{ij} - optymalne Dube mnożenie
bloków $A_i \dots A_j$

$$k_{1n} = ?$$

$$k_{ii} = 0$$

$$k_{ij} = \min_{i \leq m < j} \left[k_{im} + k_{m+1,j} + \text{koszt mnożenia bloków} \right]$$
$$\left[A_i \dots A_m \right] \left[A_{m+1} \dots A_j \right]$$

$$\frac{4^n}{n^{3/2}} \rightsquigarrow n \log n$$