

Układy równań liniowych

Dla liczb a_{ij} , przy czym $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$ oraz b_i , $i = 1, \dots, m$ układem m równań liniowych z n niewiadomymi nazywamy układ

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad m \times n$$

x_i - niewiadome
 a_{ij} - wsp.
 b_i - wyraz wolny

a_{ij} - współwyznaczniki
w równaniu

Macierz układu równań

Postacią macierzową układu równań nazywamy tablicę

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right]$$

macierz układu

wektor prawych stron układu

$$[A \mid b]$$

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + 3y = -1 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{array} \right]$$

$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & c_2 \end{array} \right]$$

$\Uparrow \Downarrow$

$$\begin{cases} x = c_1 \\ y = c_2 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{u_1 - u_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -4 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{u_2 - u_1}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -4 & 4 \\ 0 & 7 & -5 \end{array} \right] \xrightarrow{u_2 \cdot \frac{1}{7}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} \end{array} \right] \xrightarrow{u_1 + 4u_2}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{8}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} \end{array} \right] \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{8}{7} \\ y = -\frac{5}{7} \end{cases}$$

Operacje elementarne

- ↪ Zamiana miejscami wiersza i -tego z wierszem j -tym.
- ↪ Pomnożenie i -tego wiersza przez dowolną liczbę $c \neq 0$.
- ↪ Dodanie do wiersza i -tego wiersza j -tego pomnożonego przez liczbę c .

$$\left[A \mid b \right] \xrightarrow[\text{elementarne}]{\text{operacje}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & & & c_1 \\ & \triangle & & \vdots \\ & & 1 & c_m \end{array} \right]$$

The diagram illustrates the transformation of an augmented matrix $[A \mid b]$ into row echelon form using elementary operations. The resulting matrix shows a staircase pattern of leading ones (1) on the diagonal, with zeros below them. The right-hand side of the augmented matrix is labeled $c_1, \vdots, c_m$.

Operacje elementarne a rozwiązania

Twierdzenie

Wykonując operacje elementarne na macierzy rozszerzonej układu równań nie zmieniamy jego rozwiązań.

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 14 \\ 2x - y + z = 3 \\ -x + 3y + 2z = 11 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 & 11 \end{array} \right] \xrightarrow[\substack{u_2 - 2u_1 \\ u_3 + u_1}]{\substack{u_2 + u_3}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & -5 & -5 & -25 \\ 0 & 5 & 5 & 25 \end{array} \right] \xrightarrow{u_2 + u_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 25 \end{array} \right] \xrightarrow{u_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & 5 & 5 & 25 \\ 0 & 5 & 5 & 25 \end{array} \right] \xrightarrow{u_2 \cdot \frac{1}{5}}$$

$$0=0 \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \end{array} \right] \xrightarrow{u_1 - 2u_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \end{array} \right] \xleftrightarrow{\updownarrow}$$

$$\begin{cases} x + z = 4 \\ y + z = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 4 - z \\ y = 5 - z \end{cases}, \quad z \in \mathbb{R}$$

$$z = 0 \Rightarrow x = 4 \quad y = 5$$

$$z = 1 \Rightarrow x = 3 \quad y = 4$$

$$z = \pi + \sqrt{2} \Rightarrow x = 4 - \pi - \sqrt{2} \\ y = 5 - \pi - \sqrt{2}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 5 \\ 2x + 2y + 7z = 30 \\ 3x + y + 5z = 25 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & 7 & 30 \\ 3 & 1 & 5 & 25 \end{array} \right] \xrightarrow[\mu_3 - 3\mu_1]{\mu_2 - 2\mu_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 20 \\ 0 & -2 & 2 & 10 \end{array} \right] \xrightarrow[\mu_3 \cdot (-\frac{1}{2})]{\mu_2 \cdot \frac{1}{5}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -5 \end{array} \right] \xrightarrow{\mu_2 \leftrightarrow \mu_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow[\mu_2 + \mu_3]{\mu_1 - \mu_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow{\mu_1 - \mu_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right]$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \\ z = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 2y + z = 5 \\ 3x - y + 4z = 7 \\ 12x + 4y + 11z = 28 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 4 & 7 \\ 12 & 4 & 11 & 28 \end{array} \right] \xrightarrow[\substack{u_2 - u_1 \\ u_1 \leftrightarrow u_2}]{u_2 - u_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 5 \\ 12 & 4 & 11 & 28 \end{array} \right] \xrightarrow[\substack{u_3 - 12u_1}]{u_2 - 2u_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 3 & 2 \\ 0 & 8 & -5 & 1 \\ 0 & 40 & -25 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow{u_3 - 5u_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 3 & 2 \\ 0 & 8 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow[\substack{u_3 \cdot (-1)}]{u_2 \cdot \frac{1}{8}}$$

$$0 = -1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -5/8 & 1/8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

A
A|b

$$\text{rank } A = 2$$

$$\text{rank } [A|b] = 3 \quad \#$$

Postać zredukowana/schodkowa macierzy

Powiemy, że macierz jest w postaci **zredukowanej** (lub **schodkowej**), jeżeli:

- ~> poniżej żadnego wiersza złożonego z samych zer nie ma wiersza niezerowego,
- ~> w każdym niezerowym wierszu pierwszym niezerowym elementem (licząc od lewej strony) jest 1,
- ~> w każdych dwóch niezerowych wierszach pierwsza 1 w wierszu znajdującym się wyżej występuje wcześniej (licząc od lewej strony) niż pierwsza 1 w wierszu znajdującym się niżej.

Hand-drawn diagram of a 2D array with dimensions 3x4. The array contains the values: [1, 0, 0, 1] in the first row and [0, 0, 1, 2] in the second row. A blue arrow points to the first row, and a blue '3' is written next to it, indicating the number of rows.

Postać zredukowana/schodkowa macierzy

Powiemy, że macierz jest w postaci **zredukowanej** (lub **schodkowej**), jeżeli:

- ~> poniżej żadnego wiersza złożonego z samych zer nie ma wiersza niezerowego,
- ~> w każdym niezerowym wierszu pierwszym niezerowym elementem (licząc od lewej strony) jest 1,
- ~> w każdych dwóch niezerowych wierszach pierwsza 1 w wierszu znajdującym się wyżej występuje wcześniej (licząc od lewej strony) niż pierwsza 1 w wierszu znajdującym się niżej.

Macierz jest w postaci **całkowicie zredukowanej**, jeżeli jest w postaci zredukowanej oraz

- ~> w każdej kolumnie, w której występuje wiodąca 1, nie ma innych elementów niezerowych.

Jednoznaczność postaci zredukowanej

Twierdzenie

Każdą macierz można sprowadzić do postaci całkowicie zredukowanej przez wykonanie ciągu operacji elementarnych. Ponadto, wszystkie uzyskane w ten sposób postaci całkowicie zredukowane są równe, a liczba wiodących 1 w każdej postaci zredukowanej jest równa liczbie wiodących 1 w postaci całkowicie zredukowanej.

Rząd macierzy

Rzędem macierzy nazywamy liczbę wiodących 1 w jej postaci (całkowicie) zredukowanej.

$$r_2(A)$$

$$r(A)$$

$$\text{rank}(A)$$

Twierdzenie Kroneckera-Capellego

Układ równań ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy rząd macierzy rozszerzonej układu jest równy rzędowi macierzy układu.

$$\text{rank}[A|b] = \text{rank } A$$

$$\begin{cases} x + a^2y + z = -a \\ x + y - az = a^2 \\ y + z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} x & y & z \end{matrix} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a^2 & 1 & -a \\ 1 & 1 & -a & a^2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{u_2 - u_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a^2 & 1 & -a \\ 0 & 1-a^2 & -a-1 & a^2+a \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{u_2 \leftrightarrow u_3} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a^2 & 1 & -a \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-a^2 & -a-1 & a^2+a \end{array} \right] \xrightarrow{u_3 - u_2(1-a^2)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a^2 & 1 & -a \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a^2-a-2 & a^2+a-1 \end{array} \right] \\ \begin{matrix} (a-1)(a-2) & 2(a+1)(a-\frac{1}{2}) \end{matrix} \end{array}$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a^2 & 1 & -a \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & (a-1)(a-2) & 2(a+1)(a-\frac{1}{2}) \end{array} \right]$$

I $a = -1$

$$\text{rank } A = 2$$

$$\text{rank}[A|b] = 2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{u_1 - u_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ y + z &= 1 \\ y &= 1 - z \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 - z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Nichtlineare iide varu.
Uhrer ungenau.

II $a = 2$
 $\text{rank } A = 2$ $\text{rank}[A|b] = 3$
 Układ sprzeczny.

III $a \neq -1 \wedge a \neq 2$
 $\text{rank } A = \text{rank}[A|b] = 3$ = Ciąba nieskończonych
 Układ rozwiązy.

... $x = \dots$
 $y = \dots$
 $z = \dots$