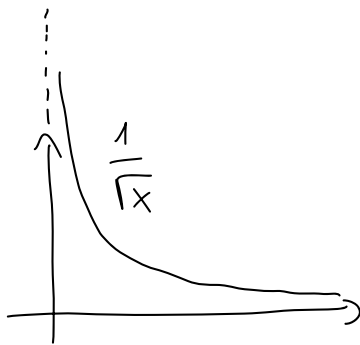
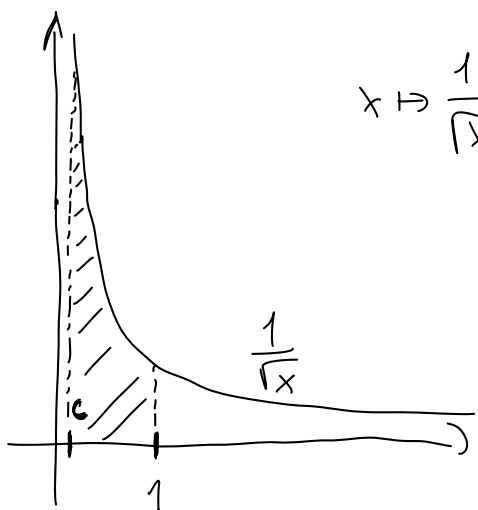


Całki niewłaściwe

1. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$



Funkcja $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ nie jest ograniczona na $[0, 1]$.

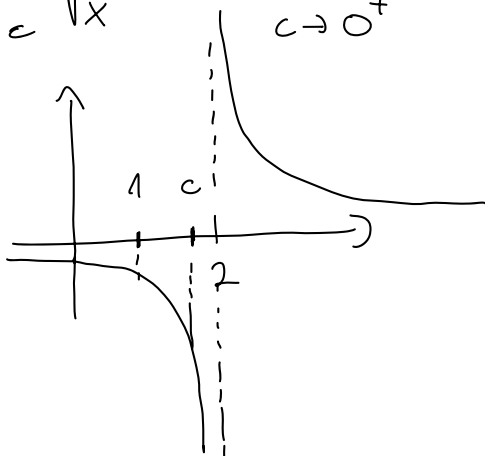


$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ jest ograniczona $[c, 1]$
dla dowolnego $c \in (0, 1]$

$$\int_c^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int_c^1 x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \Big|_c^1 = \frac{1}{\frac{1}{2}} - \frac{c^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = 2 - 2\sqrt{c}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{c \rightarrow 0^+} \int_c^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{c \rightarrow 0^+} (2 - 2\sqrt{c}) = 2$$

2. $\int_1^2 \frac{dx}{x-2}$

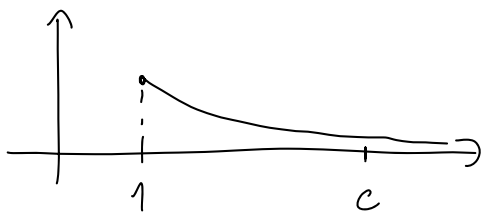


$c \in [1, 2)$

$$\int_1^c \frac{dx}{x-2} = \ln|x-2| \Big|_1^c = \ln|c-2| - \ln|1-2| = \ln(2-c) - \ln 1 = \ln(2-c)$$

$$\int_1^2 \frac{dx}{x-2} = \lim_{c \rightarrow 2^-} \int_1^c \frac{dx}{x-2} = \lim_{c \rightarrow 2^-} \ln(2-c) = [\ln(0^+)] = \boxed{-\infty}$$

$$3. \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$$



$$\int_1^c \frac{1}{x^2} dx = \int_1^c x^{-2} dx = \frac{x^{-1}}{-1} \Big|_1^c = -\frac{1}{c} + 1 = 1 - \frac{1}{c}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_1^c \frac{1}{x^2} dx = \lim_{c \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{c}\right) = 1 \quad \text{P.V.}$$

$$4. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^0 + \int_0^{+\infty}$$

$$\not\equiv \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_{-c}^c$$

$$\equiv \lim_{\substack{c \rightarrow -\infty \\ d \rightarrow +\infty}} \int_c^d$$

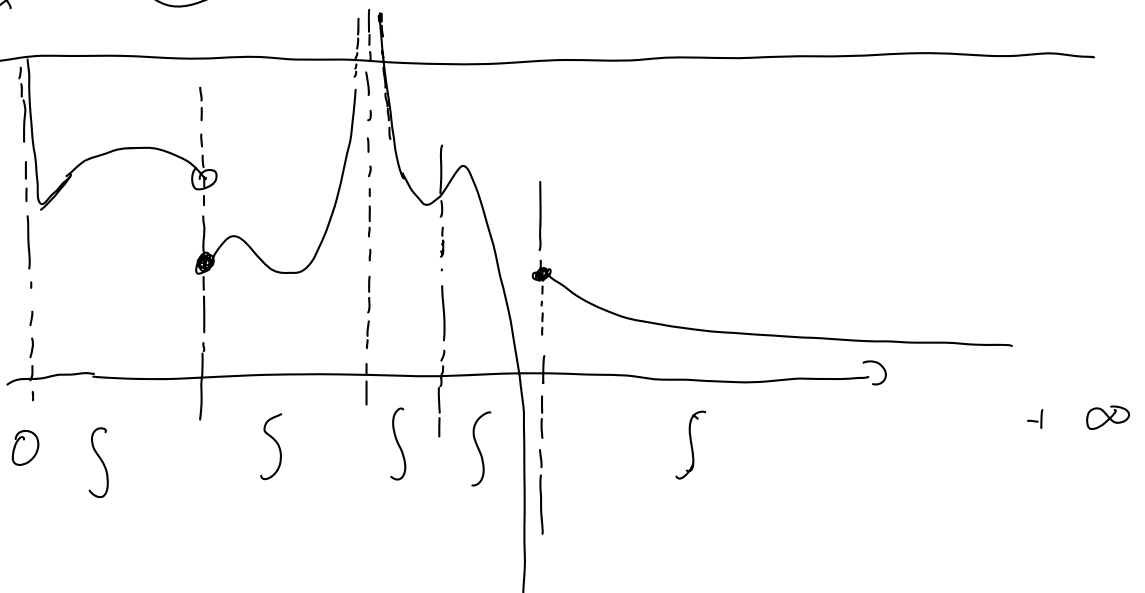
$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctg x + C$$

$$\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{c \rightarrow -\infty} \int_c^0 \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{c \rightarrow -\infty} \arctg x \Big|_c^0 =$$

$$= \lim_{c \rightarrow -\infty} (\arctg 0 - \arctg c) = -\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{c \rightarrow +\infty} (\arctg c - \arctg 0) = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi$$



Całki niewłaściwe

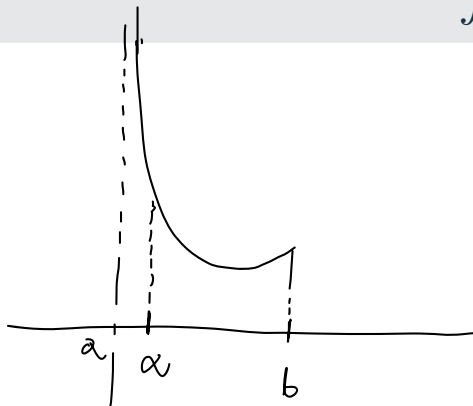
$$\alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$$

Niech funkcja f będzie określona w przedziale $(a, b]$ i całkowna w przedziale $[\alpha, b]$ dla każdego $\alpha \in (a, b)$. Jeżeli istnieje granica

$$\lim_{\alpha \rightarrow a^+} \int_{\alpha}^b f(x) dx,$$

to nazywamy ją całką niewłaściwą funkcji f po przedziale $[a, b]$ i oznaczamy

$$\int_a^b f(x) dx.$$



Całki niewłaściwe

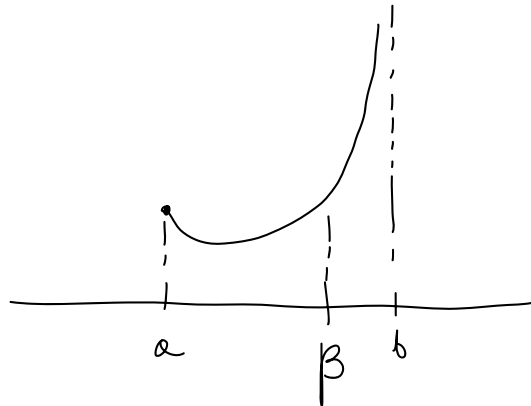
$$b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

Niech funkcja f będzie określona w przedziale $[a, b)$ i całkowna w przedziale $[a, \beta]$ dla każdego $\beta \in (a, b)$. Jeżeli istnieje granica

$$\lim_{\beta \rightarrow b^-} \int_a^\beta f(x) dx,$$

to nazywamy ją całką niewłaściwą funkcji f po przedziale $[a, b]$ i oznaczamy

$$\int_a^b f(x) dx.$$



Liczy zespolone

1. Czy równanie
 $x + 1 = 0$
ma rozwiązanie?

NIE w \mathbb{N}

$$x = -1$$

TAK w \mathbb{Z}

$(a, b), (c, d) \quad \mathbb{N} \times \mathbb{N}$
 $(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow a + d = b + c$
 $\mathbb{Z} \cong \{[(a, b)] : a, b \in \mathbb{N}\}$

2. Czy równanie
 $3x - 2 = 0$
ma rozwiązanie?
NIE w \mathbb{Z}

TAK w $\mathbb{Q} \quad x = \frac{2}{3}$

3. Czy równanie
 $x^2 - 2 = 0$
ma rozwiązanie?
NIE w \mathbb{Q}

TAK w $\mathbb{R} \quad x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2}$

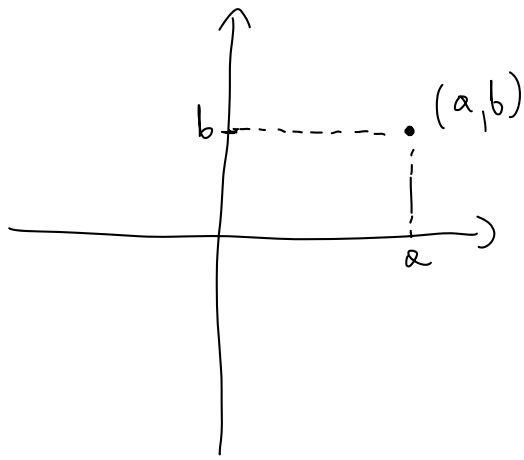
$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset ?$

4. Czy równanie
 $x^2 + 1 = 0$
ma rozwiązanie?
NIE w \mathbb{R}



TAK w ?

$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

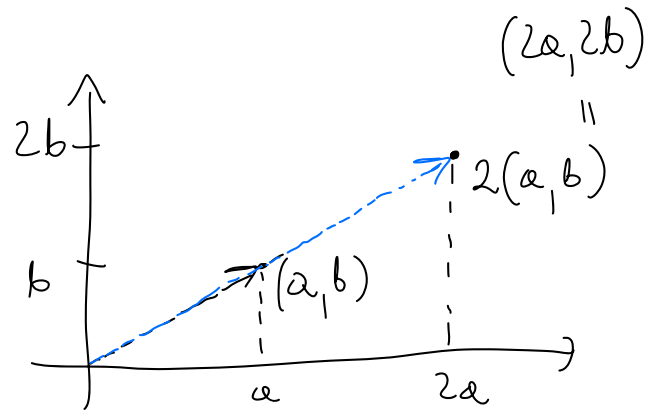
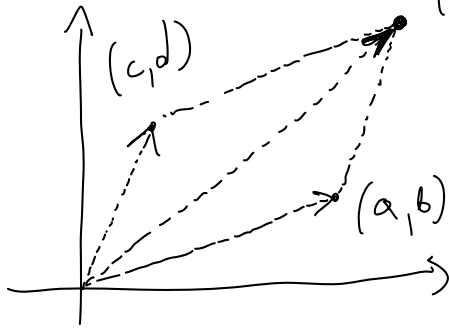


$\mathbb{R} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$$(\mathbb{R}, +, \cdot) \subset (\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \oplus, \odot)$$

$\oplus \text{ u } \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$



$\odot \text{ u } \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

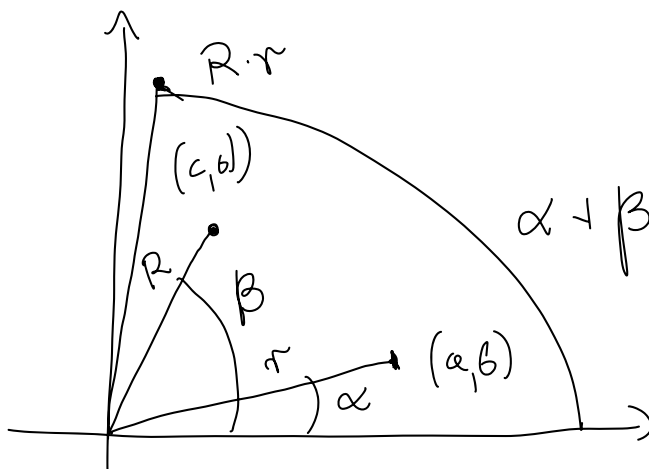
~~$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac, bd)$$~~

~~$$(a, b) \cdot (c, d) = 0$$~~

~~$$(2, 0) \cdot (0, 1) = (0, 0)$$~~

$$\leftarrow \vdots a \cdot b = 0$$

\odot



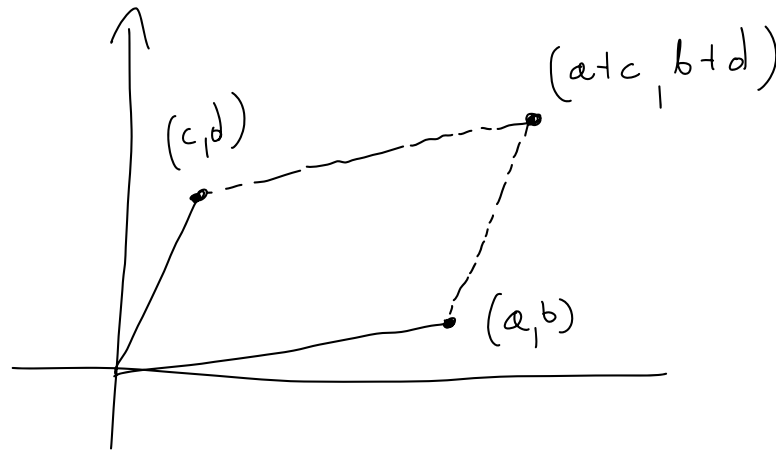
Działania w zbiorze punktów płaszczyzny

Jeżeli $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $(c, d) \in \mathbb{R}^2$ i $k \in \mathbb{R}$, to definiujemy

$$(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d)$$

oraz

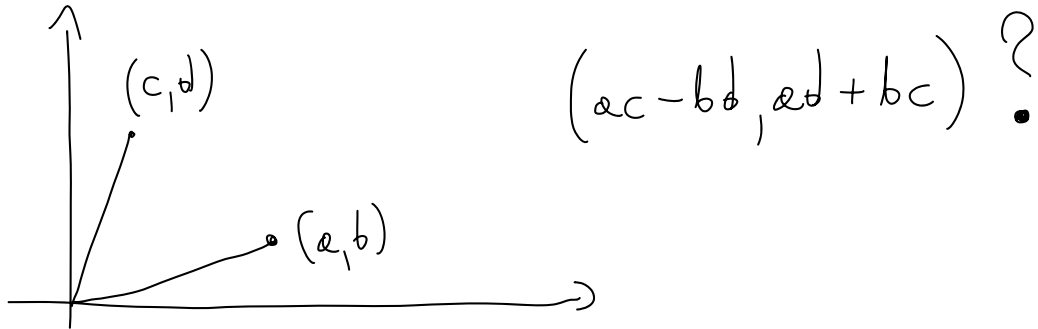
$$k \cdot (a, b) := (ka, kb).$$



Działania w zbiorze punktów płaszczyzny

Jeżeli $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ i $(c, d) \in \mathbb{R}^2$, to definiujemy

$$(a, b) \cdot (c, d) := (ac - bd, ad + bc).$$



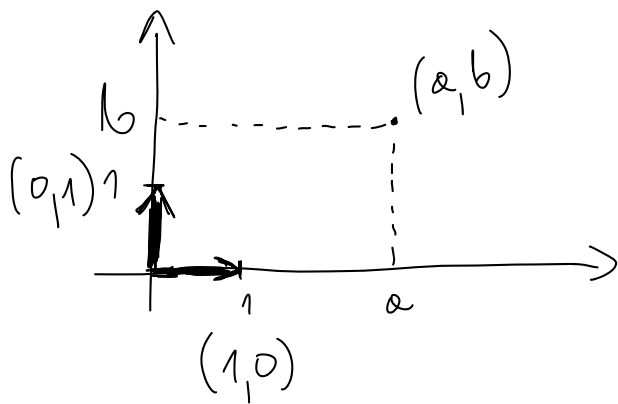
Zbiór liczb zespolonych

Zbiór \mathbb{R}^2 z działaniami dodawania i mnożenia określonymi wcześniej nazywamy **zbiorem liczb zespolonych** i oznaczamy

\mathbb{C} lub $(\mathbb{C}, +, \cdot)$.

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C} \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{C} \\ \mathbb{H} \end{array} \right.$$

↑
complex



$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$?

$$\mathbb{R} \cong \{(a, 0) : a \in \mathbb{R}\}$$

$$a \rightsquigarrow (a, 0)$$

$a, b \in \mathbb{R}$

$$a + b$$

$$a \cdot b$$

\mathbb{C}

$$(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0)$$

$$(a, 0) \cdot (b, 0) = (ab - 0 \cdot 0, a \cdot 0 + 0 \cdot b) = (ab, 0)$$

Tw. W zbiorze \mathbb{C} :

- a) działania
- b) działania

+ i • są przemienne i łączne,
• jest rozdzielne względem +.

Dok. (ćw.)

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

$$a \rightsquigarrow (a, 0)$$

$$a \in \mathbb{R} \rightsquigarrow (a, 0) \in \mathbb{C}$$

$$a \in \mathbb{C}$$

Jednostka urojona

Liczbę zespoloną $(0, 1)$ nazywamy **jednostką urojoną**.

i oznaczymy przez \boxed{i}

$$(a, b) = a \underbrace{(1, 0)}_1 + b \underbrace{(0, 1)}_i = \frac{a + bi}{\text{postać algebraiczna}}$$

$$i^2 = i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = \boxed{-1}$$

$$\boxed{i^2 = -1}$$

$$x^2 + 1 = 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad x = i \quad \vee \quad x = -i$$

$$\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}$$

$$\begin{aligned}(a + bi) + (c + di) &= a + c + bi + di = \\ &= a + c + (b + d)i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a + bi)(c + di) &= ac + adi + bic + bidi = \\ &= ac + adi + bci + \underbrace{bd i^2}_{=-1} = \\ &= ac + adi + bci - bd = \\ &= \underbrace{ac - bd} + \underbrace{(ad + bc)}i\end{aligned}$$

$$(2 + i) + (-1 + 2i) = 1 + 3i$$

$$\begin{aligned}(2 + i) \cdot (-1 + 2i) &= -2 + 4i - i + \underbrace{2i^2}_{-2} = \\ &= -4 + 3i\end{aligned}$$

Postać algebraiczna

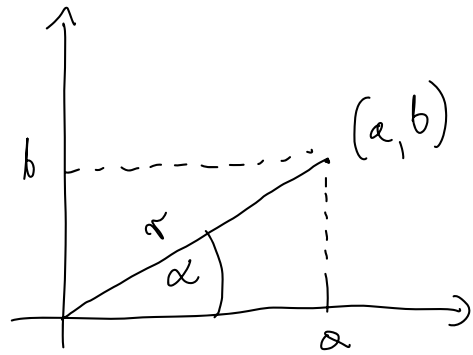
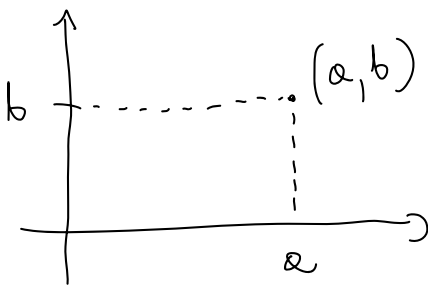
Jeżeli $z = (a, b) \in \mathbb{C}$, to zapis

$$z = a + bi$$

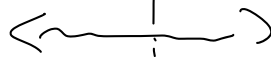
nazywamy **postacią algebraiczną** liczby zespolonej z .

$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ usp. kartezijanske

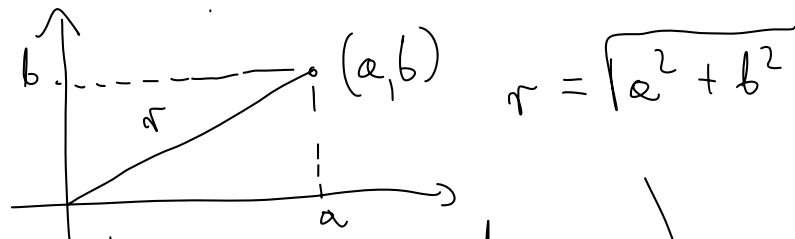
$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ usp. biegunove



(a, b)



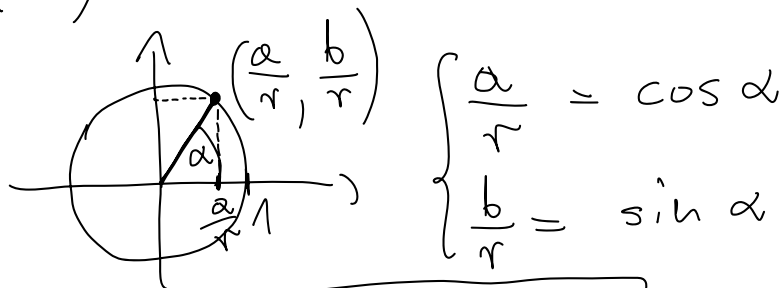
(r, α)



$$a + bi = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} i \right) =$$

$$= r \left(\frac{a}{r} + \frac{b}{r} i \right)$$

$$\left(\frac{a}{r} \right)^2 + \left(\frac{b}{r} \right)^2 = \frac{a^2}{a^2 + b^2} + \frac{b^2}{a^2 + b^2} = 1$$



$$a + bi = \boxed{r (\cos \alpha + i \sin \alpha)}$$

$(a, b) \longleftrightarrow (r, \alpha)$

Postać trygonometryczna

Jeżeli $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ ma współrzędne biegunowe (r, α) , to zapis

$$z = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

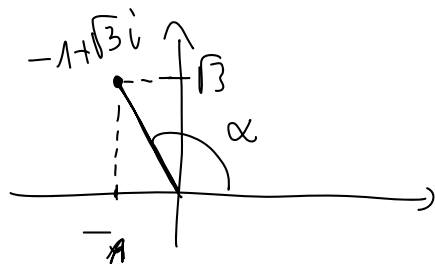
nazywamy **postacią trygonometryczną** liczby zespolonej z . Liczbę α nazywamy **argumentem** liczby z i oznaczamy $\arg z$. Jeżeli $\alpha \in [0, 2\pi)$, to liczbę tę nazywamy **argumentem głównym** i oznaczamy $\text{Arg } z$.

$$z = -1 + \sqrt{3}i \quad |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = r \quad \leftarrow \text{Moduł}$$

$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1 + 3} = 2$$

$$z = 2 \left(\underbrace{-\frac{1}{2}}_{\cos \alpha} + \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2}}_{\sin \alpha} i \right) = 2 \left(\cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi \right)$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} = \cos \alpha \\ \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin \alpha \end{cases}$$



$$\alpha = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$$

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta + i \sin \beta) =$$

$$= \underbrace{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}_{\cos(\alpha + \beta)}$$

$$+ i \underbrace{(\cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta)}_{\sin(\alpha + \beta)}$$

$$= \cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)$$

