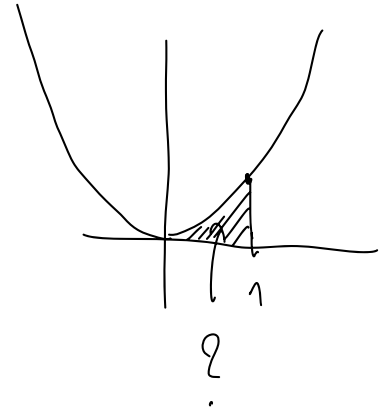


$$\sum P_i \xrightarrow{P, J} \int_a^b f(x) dx$$

$$\int_0^1 x dx$$

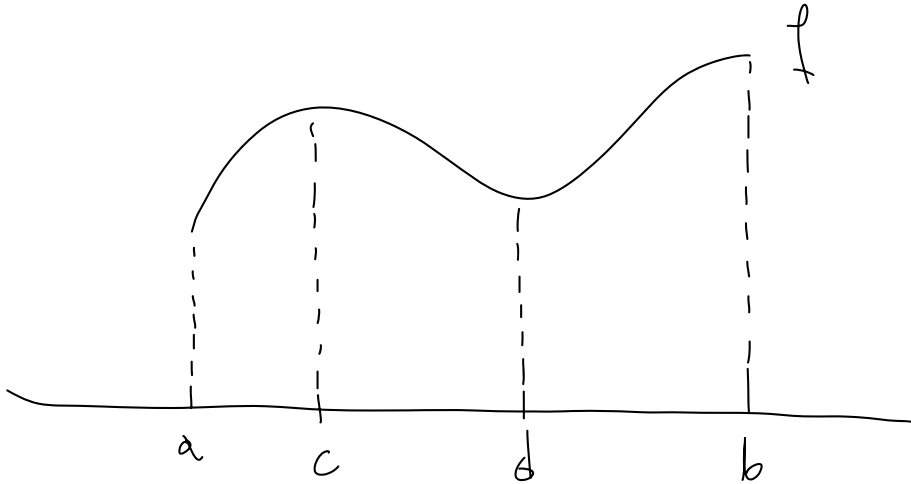
$$\int_0^1 x^2 dx$$



Własności całki

Twierdzenie

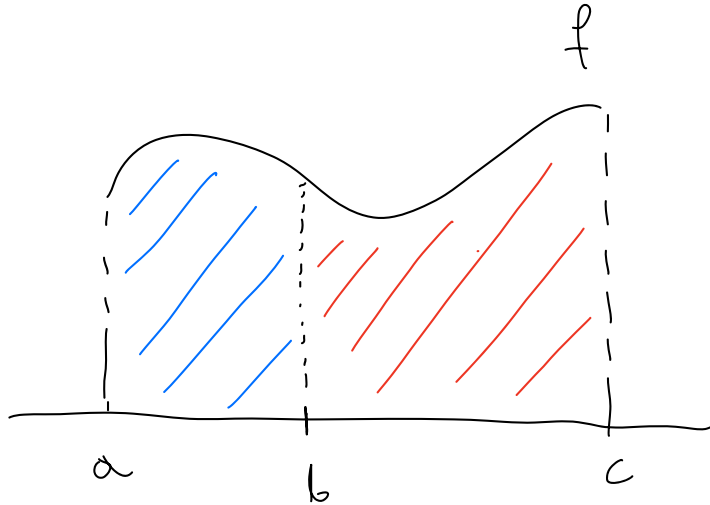
Jeżeli funkcja f jest całkowna na przedziale $[a, b]$ oraz $[c, d]$ jest podprzedziałem $[a, b]$, to f jest całkowna na przedziale $[c, d]$.



Własności całki

Twierdzenie (addytywność całki względem drog. całkowania)
Jeżeli funkcja f jest całkowna na przedziale $[a, c]$ oraz $c \in [a, b]$, to

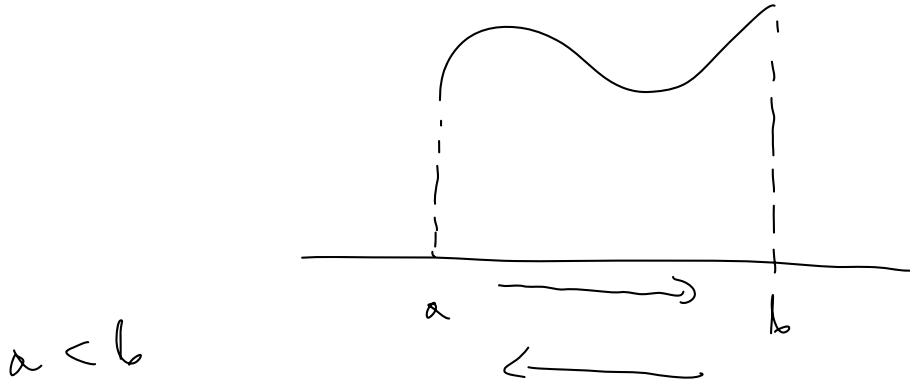
$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f.$$



Granice całkowania

Jeżeli funkcja f jest całkowna na przedziale $[a, b]$, to definiujemy

$$\int_b^a f = - \int_a^b f.$$



$$\int_b^a f = - \int_a^b f$$

Własności całki

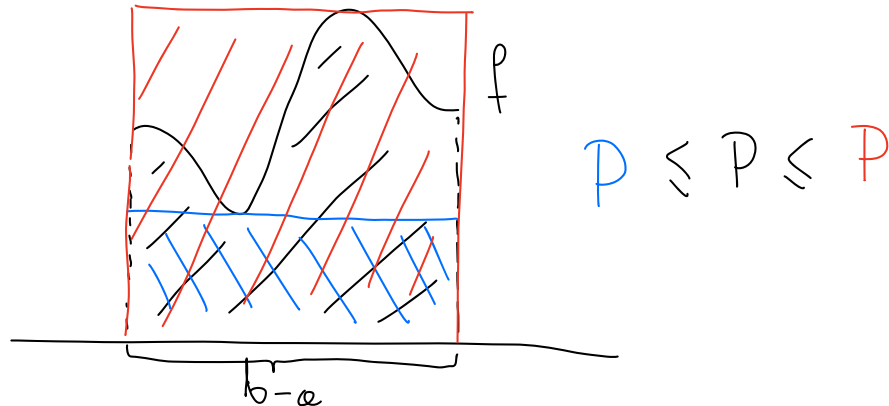
Twierdzenie

Jeżeli funkcja f jest całkowana na przedziale $[a, b]$ oraz

$$m \leq f(x) \leq M, \quad x \in [a, b]$$

dla pewnych stałych $m, M \in \mathbb{R}$, to

$$m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a).$$

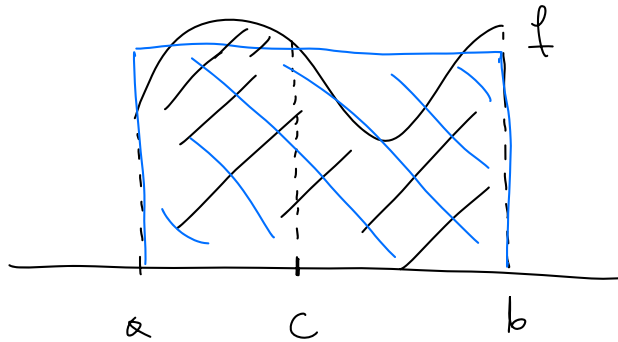


Własności całki

Twierdzenie (tu. o wart. średniej)

Jeżeli funkcja f jest ciągła na przedziale $[a, b]$, to istnieje takie $c \in [a, b]$, że

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f = f(c).$$



$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \\ &= (b-a) f(c) \end{aligned}$$

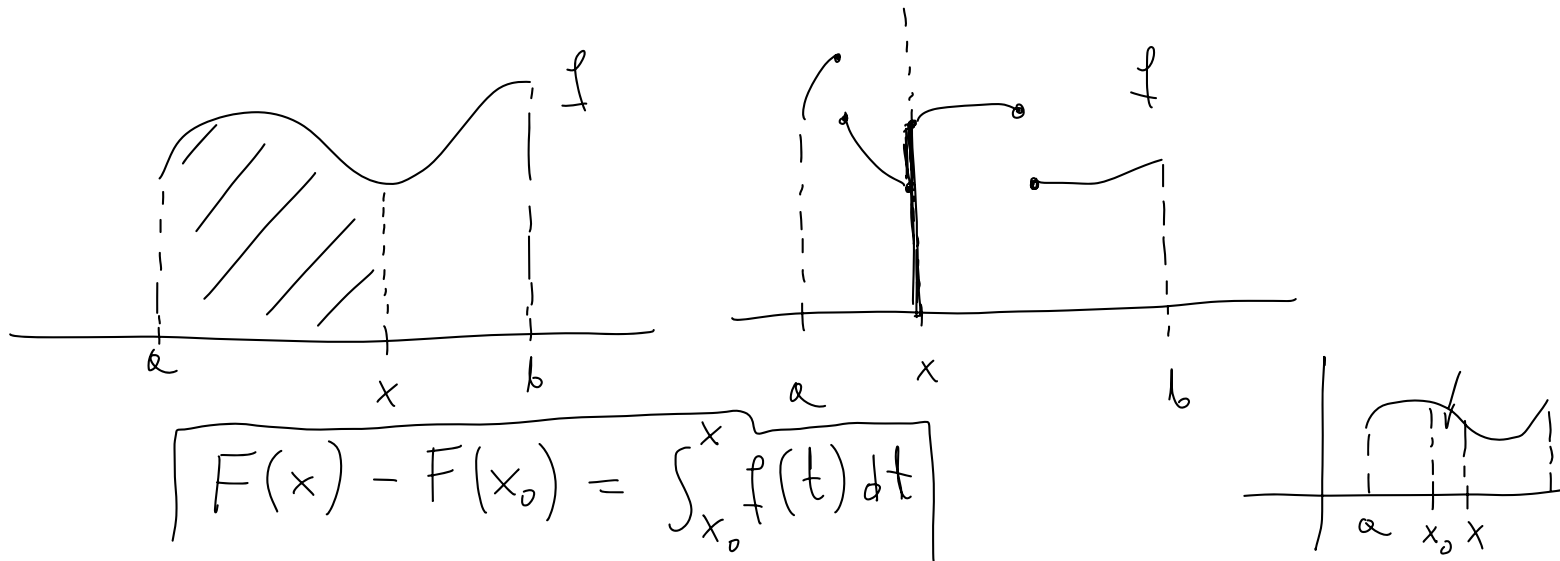
Funkcja górnej granicy całkowania

Twierdzenie

Jeżeli funkcja f jest całkowna na przedziale $[a, b]$, to funkcja $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dana wzorem

$$F(x) = \int_a^x f, \quad x \in [a, b]$$

jest ciągła na $[a, b]$.



Funkcja górnej granicy całkowania

Twierdzenie

Jeżeli funkcja f jest całkowna na $[a, b]$ i ciągła w punkcie $x_0 \in [a, b]$,
to funkcja F dana wzorem

$$F(x) = \int_a^x f, \quad x \in [a, b]$$

jest różniczkowalna w punkcie x_0 i

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

$$\left(\int_a^x f \right)' = f(x)$$

$$f \rightsquigarrow \int f \rightsquigarrow (\int f)' = f$$

Funkcja pierwotna

Jeżeli dla funkcji f zdefiniowanej na dowolnym przedziale I istnieje taka funkcja F określona i różniczkowalna na przedziale I , że

$$F'(x) = f(x), \quad x \in I,$$

to nazywamy ją **funkcją pierwotną** funkcji f na przedziale I .

$$f(x) = x$$

$$F(x) = \frac{x^2}{2}$$

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$$F(x) = \ln x, \quad x > 0$$

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}}$$

$$F(x) = ?$$

Twierdzenie Newtona-Leibniza

Jeżeli F jest funkcją pierwotną funkcji ciągłej f na przedziale $[a, b]$, to

$$\int_a^x f = F(x) - F(a)$$

dla każdego $x \in [a, b]$.

- $F'(x) = f(x)$
- $(\int_a^x f)' = f(x)$

$$(F(x) - \int_a^x f)' = 0$$

$$F(x) - \int_a^x f = C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\begin{array}{l} \downarrow \\ x=a \\ F(a) - \underbrace{\int_a^a f}_{=0} = C \end{array}$$

$$F(a) = C \Rightarrow F(x) - \int_a^x f = F(a)$$

$$\int_a^b f = F(b) - F(a)$$

N-L

$$F(x) \Big|_a^b$$

Funkcje pierwotne i całka nieoznaczona

Zbiór wszystkich funkcji pierwotnych funkcji f oznaczamy przez

$$\int f(x) dx \quad \text{lub} \quad \int f$$

i nazywamy **całką nieoznaczoną** funkcji f .

$$\int f(x) dx = \left\{ F : F' = f \right\}$$

$$\left(\frac{x^2}{2}\right)' = x$$

$$\boxed{\frac{x^2}{2}} \in \int x dx$$
$$\boxed{\frac{x^2}{2} + 1} \in$$

Własności całki nieoznaczonej

Jeżeli F jest funkcją pierwotną funkcji f , to $\int f(x) dx$ składa się ze wszystkich funkcji G postaci $G(x) = F(x) + C$, gdzie C jest dowolną liczbą rzeczywistą.

$$F \in \int f, \quad G \in \int f \Rightarrow G - F = C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$F'(x) = x, \quad F = ? \quad F(x) = \frac{x^2}{2}$$

$$\begin{array}{l} F' = f \\ G' = f \end{array} \quad \begin{array}{l} (F - G)' = 0 \\ F - G = C \end{array}$$

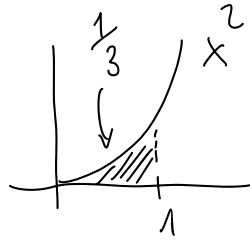
$$1) \int_0^1 x dx = F(x) \Big|_0^1 = F(1) - F(0) = \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{1}{2}$$

$F(x) = \frac{x^2}{2}$

$N-L$

$$2) \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}$$

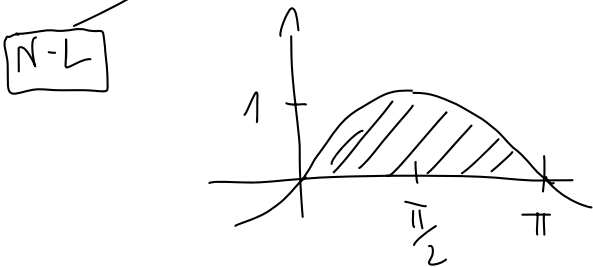
$$\left(\frac{x^3}{3} \right)' = x^2$$



$$3) \int_0^\pi \sin x dx = ?$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int_0^\pi \sin x dx = -\cos x \Big|_0^\pi = -\cos \pi - (-\cos 0) = 1 + 1 = 2$$



Całki funkcji elementarnych $(\sin x)' = \cos x$

$$\rightsquigarrow \int 0 dx = C,$$

$$\rightsquigarrow \int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C$$

$a \neq -1$

$$\rightsquigarrow \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$\rightsquigarrow \int e^x dx = e^x + C$$

$$\rightsquigarrow \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\rightsquigarrow \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\rightsquigarrow \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\rightsquigarrow \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$$

$$\rightsquigarrow \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$

$$\rightsquigarrow \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + C$$

$$\rightsquigarrow \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc} \sin x + C$$

$$(x^{a+1})' = (a+1)x^a$$

Liniowość całki nieoznaczonej

Twierdzenie

Jeżeli funkcje f i g mają funkcje pierwotne, to

$$\int (f + g) = \int f + \int g$$

oraz

$$\int cf = c \int f, \quad c \in \mathbb{R}.$$

$$(f + g)' = f' + g'$$

$$(cf)' = cf'$$

$$\int fg = ?$$

$$\int \frac{f}{g} = ?$$

$$(fg)' = f'g + fg'$$

Całkowanie przez części

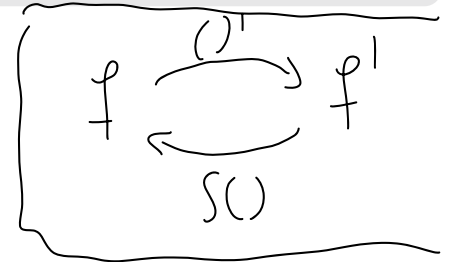
Jeżeli funkcje f i g mają ciągłe pochodne, to

$$\int f'g = fg - \int fg'$$

$$(fg)' = f'g + fg' \quad | \int ()$$

$$fg = \int f'g + \int fg'$$

$$\int f'g = fg - \int fg'$$



$$1) \int x e^x dx = \int \underbrace{x}_{f} (\underbrace{e^x}_{g})' dx =$$

$$= e^x x - \int e^x \cdot (x)' dx =$$

$$= e^x x - \int e^x dx = \boxed{e^x x - e^x + C}$$

$$2) \int x^2 \cos x dx = \int x^2 (\sin x)' dx =$$

$$= x^2 \sin x - \int (x^2)' \sin x dx =$$

$$= x^2 \sin x - \int 2x \sin x dx = x^2 \sin x - 2 \int x (-\cos x)' dx$$

$$= x^2 \sin x - 2 \left[-x \cos x - \int (x)' (-\cos x) dx \right] =$$

$$= x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \int \cos x dx =$$

$$= \boxed{x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C}$$

$$\int x^2 \cos x dx = \left| \begin{array}{ll} u = x^2 & du = 2x \\ dv = \cos x & v = \sin x \end{array} \right| = \dots$$

$$3) \int \ln x dx = \int \underbrace{1}_{f} (\underbrace{\ln x}_{g})' dx =$$

$$= x \ln x - \int x (\ln x)' dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx$$

$$= x \ln x - \int 1 dx = \boxed{x \ln x - x + C}$$

$$\boxed{(f(g))' = f'(g) \cdot g'}$$

Całkowanie przez podstawienie

Założmy, że funkcja f jest ciągła oraz $\int f = F$. Niech g i g' będą funkcjami ciągłymi. Jeżeli istnieje złożenie $f \circ g$, to

$$\int f(g(x))g'(x) dx = F(g(x)) + C.$$

$$\begin{aligned} (F(g(x)))' &= F'(g(x)) \cdot g'(x) = \\ &= f(g(x)) \cdot g'(x) \end{aligned}$$