$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}_{\text{WIELOMIAN TAYLORA}} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}_{\text{RESZTA W POSTACI LAGRANGE'A}}$$

$$T_n(x,x_0) \qquad\qquad R_n(x,x_0)$$

$c \in (x, x_0)$ lub $c \in (x_0, x)$.

$$R_n(x,x_0) = f(x) - T_n(x,x_0)$$

$$\boxed{g(t) = f(x) - T_n(x,t)}$$

$$g'(t) = 0 - \frac{d}{dt}T_n(x,t)$$

$$\frac{d}{dt}T_n(x,t) = \frac{d}{dt}\sum_{k=0}^{n} \underbrace{\frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k} =$$

$$= f'(t) +$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\left[f^{(k+1)}(t)(x-t)^k + f^{(k)}(t)\cdot k(x-t)^{k-1}\cdot(-1)\right] =$$

$$= \cancel{f'(t)} + \left(\cancel{f^{(2)}(t)(x-t)^1} - \cancel{f^{(1)}(t)}\right) \leftarrow k=1$$

$$+ \left(\cancel{\frac{1}{2}f^{(3)}(t)(x-t)^2} - \cancel{f^{(2)}(t)(x-t)^1}\right) \leftarrow k=2$$

$$+ \left(\cancel{\frac{1}{3!}f^{(4)}(t)(x-t)^3} - \cancel{\frac{1}{2!}f^{(3)}(t)(x-t)^2}\right)$$

$$\ldots + \left(\underbrace{\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(t)(x-t)^n} - \cancel{\frac{1}{(n-1)!}f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}}\right)$$

$$\frac{d}{dt}T_n(x,t) = \frac{1}{n!}f^{(n+1)}(t)(x-t)^n$$

$$\frac{d}{dt} T_n(x,t) = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n$$

$$R_n(x,x_0) = f(x) - T_n(x,x_0)$$

$$g(t) = f(x) - T_n(x,t), \quad t \in [x,x_0] \text{ lub } [x_0,x]$$

$$g'(t) = -\frac{1}{n!} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n$$

$$\boxed{T_n(x,t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k}$$

$k=0$: $f(t)$

$$g(x) = f(x) - T_n(x,x) = $$
$$= f(x) - f(x) = 0$$

$$\boxed{T_n(x,t) = f(t) + f'(t)(x-t)^1 + \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 + \frac{f'''(t)}{3!}(x-t)^3 + \dots}$$

$$g(x_0) = f(x) - T_n(x,x_0) = R_n(x,x_0).$$

$$h(t) = g(t) - \frac{R_n(x,x_0)(x-t)^{n+1}}{(x-x_0)^{n+1}}$$

$$h(x) = g(x) - 0 = g(x)$$

$$h(x_0) = g(x_0) - \frac{R_n(x,x_0)\cancel{(x-x_0)^{n+1}}}{\cancel{(x-x_0)^{n+1}}} = g(x_0) - R_n(x,x_0) = $$
$$= 0$$

Na mocy tw. Rolle'a zastosowanego do funkcji h

$$\bigvee_{\substack{c \in (x,x_0) \\ \vee (x_0,x)}} h'(c) = 0$$

$$h'(t) = g'(t) - \frac{R_n(x,x_0)}{(x-x_0)^{n+1}} \cdot (n+1)(x-t)^n(-1)$$

$$h'(t) = g'(t) - \frac{R_n(x,x_0)}{(x-x_0)^{n+1}} \cdot (n+1)(x-t)^n(-1)$$

$$h'(c) = 0 \iff g'(c) + (n+1)\frac{(x-c)^n}{(x-x_0)^{n+1}} \cdot R_n(x,x_0) = 0$$

$$R_n(x,x_0) = -g'(c) \cdot \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(x-c)^n} \cdot \frac{1}{n+1}$$

$$= -\underbrace{\left[-\frac{1}{n!} f^{(n+1)}(c)\cancel{(x-c)^n}\right]}_{g'(c)} \cdot \frac{(x-x_0)^{n+1}}{\cancel{(x-c)^n}} \cdot \frac{1}{n+1} =$$

$$= \boxed{\frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c) \cdot (x-x_0)^{n+1}}$$

Wzór Taylora

$f: I \to \mathbb{R}$

Załóżmy, że $I = [a, b]$ jest przedziałem domkniętym oraz $x, x_0 \in I$, $x \neq x_0$. Jeżeli dla liczby naturalnej $n \geqslant 1$ funkcja f ma

- ciągłą pochodną rzędu n na przedziale I,
- pochodną rzędu $n+1$ na przedziale (a, b),

to istnieje taki punkt c, leżący między x a x_0, że

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \boxed{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}}.$$

ZWYKLE JEST MAŁE DLA DUŻEGO n

$$\boxed{f(x) \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k}$$

Wzór Maclaurina

$\boxed{x_0 = 0}$

1. $f(x) = e^x$ $\qquad f^{(k)}(x) = e^x, \quad k \in \mathbb{N}$

$x_0 = 0$ $\qquad T_n(x, x_0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$

$$e^x \cong \underbrace{1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots + \frac{1}{n!}x^n}$$

$$\cancel{+ \boxed{\frac{1}{(n+1)!}} e^c x^{n+1}}$$

2. $f(x) = \sin x$

$x_0 = 0$

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x \\ f'(x) &= \cos x \\ f''(x) &= -\sin x \\ f'''(x) &= -\cos x \end{aligned}$$

$$\sin x \cong x^1 - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots \pm \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

$$\cancel{+ R_n(x, x_0)}$$

3. $f(x) = \ln x$ $\qquad D = (0, +\infty)$

$x_0 = 1$

$\boxed{f'(x) = \frac{1}{x}}$, $\quad f''(x) = -\frac{1}{x^2}$, $\quad \boxed{f'''(x) = \frac{2}{x^3}}$

$f^{(4)}(x) = -\frac{3!}{x^4}$, $\quad f^{(5)}(x) = \frac{4!}{x^5}$, $\dots$

$$\boxed{f^{(k)}(x) = (-1)^{k+1} \frac{(k-1)!}{x^k}}$$

$$\ln x \cong 0 + 1 \cdot (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4$$

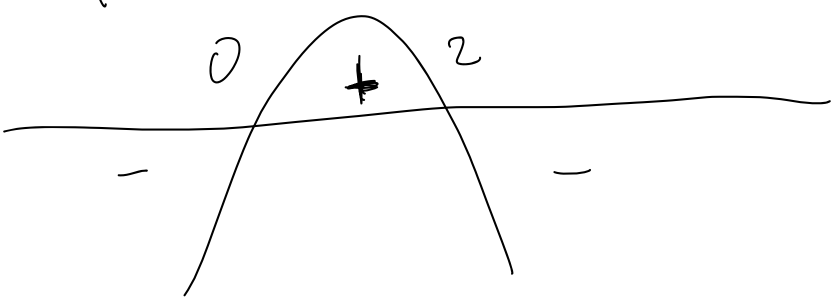
$$+ \dots \pm \frac{1}{n}(x-1)^n + \cancel{R_n(x, 1)}$$

$x \in (0, 2)$

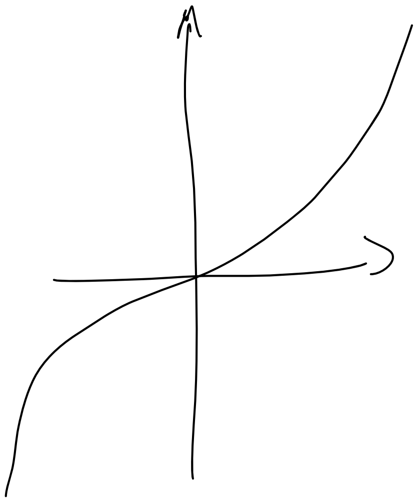
$f(x) = x^2 e^{-x}$

$$f'(x) = 2xe^{-x} - x^2 e^{-x} = $$
$$= xe^{-x}(2-x)$$

f'



x^3



$$f(x) = x^2 e^{-x}$$

$$f'(x) = 2xe^{-x} - x^2 e^{-x}$$

$x = 0 \ \vee \ x = 2$

$$f''(x) = 2e^{-x} - 2xe^{-x}$$
$$-2xe^{-x} + x^2 e^{-x} =$$
$$= e^{-x}(x^2 - 4x + 2)$$

Wzór Taylora dla $n = 1$

$$f(x) = \boxed{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)} + \frac{f''(c)}{2!}(x - x_0)^2$$

$$\boxed{f(x) - f(x_0)} = \underset{\substack{\| \\ 0}}{f'(x_0)}(x - x_0) + \underset{\geq 0}{R}$$

gdyby $f'' > 0$

$$f(x) - f(x_0) \geq 0$$

$f''(0) = e^0 (0 - 0 + 2) = 2 > 0 \Rightarrow$ w $x_0 = 0$ jest min.

$f''(2) = e^{-2}(4 - 8 + 2) = -2e^{-2} < 0 \Rightarrow$ w $x_0 = 2$ jest max.

II

Warunek dostateczny istnienia ekstremum

Załóżmy, że

- funkcja f ma w pewnym otoczeniu punktu x_0 pochodną f' oraz istnieje druga pochodna $f''(x_0)$.

Jeżeli

$$f'(x_0) = 0 \qquad \text{oraz} \qquad f''(x_0) \neq 0,$$

to funkcja f ma w punkcie x_0 ekstremum lokalne właściwe: **maksimum**, gdy $f''(x_0) < 0$, a **minimum**, gdy $f''(x_0) > 0$.

$f(x) = x^3$

$f'(x) = 3x^2$

$f''(x) = 6x$

II 6

Warunek dostateczny istnienia ekstremum

Załóżmy, że

- funkcja f ma w pewnym otoczeniu punktu x_0 pochodne do rzędu $n-1$, a pochodna $f^{(n)}(x_0)$ istnieje.

Jeżeli

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \qquad \text{oraz} \qquad f^{(n)}(x_0) \neq 0$$

i n jest liczbą **parzystą**, to funkcja f ma w punkcie x_0 ekstremum lokalne właściwe: **maksimum**, gdy $f^{(n)}(x_0) < 0$, a **minimum**, gdy $f^{(n)}(x_0) > 0$.

Jeżeli liczba n jest nieparzysta, to funkcja nie posiada ekstremum w punkcie x_0.

		w 0
0	x^3	0
1	$3x^2$	0
2	$6x$	0
3	6	6

$$f(x) = e^x + e^{-x} + 2\cos x$$

$\boxed{\text{w } x_0 = 0}$

Ekstrema globalne

Mówimy, że funkcja f przyjmuje w punkcie x_0 wartość **najmniejszą**, jeżeli

$$\bigwedge_{x \in D_f} f(x) \geqslant f(x_0).$$

Mówimy, że funkcja f przyjmuje w punkcie x_0 wartość **największą**, jeżeli

$$\bigwedge_{x \in D_f} f(x) \leqslant f(x_0).$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{0}{0}\right], \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \qquad \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} \overset{u\, x_0}{=} \left[\frac{0}{0}\right] = \frac{f(x) - \overset{\overset{0}{\shortparallel}}{f(x_0)}}{g(x) - \underset{\underset{0}{\shortparallel}}{g(x_0)}} = \frac{\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}{\dfrac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}}$$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \xrightarrow{x \to x_0} f'(x_0)$$

$$\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \xrightarrow{x \to x_0} g'(x_0)$$

Reguła de l'Hospitala

$\left[\frac{0}{0}\right]$

Jeżeli funkcje f i g spełniają warunki:

- $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$, przy czym $g(x) \neq 0$ w pewnym otoczeniu x_0 (poza, być może, samym punktem x_0),
- f' i g' istnieją w pewnym otoczeniu x_0 (poza, być może, samym punktem x_0) oraz istnieje granica $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (właściwa lub niewłaściwa),

to

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\ln(e-x)+x-1} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\overset{f}{\boxed{e^{x} - e^{-x}}}}{\boxed{\ln(e-x) + x - 1}\, g} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$f'(x) = e^{x} + e^{-x}$$

$$g'(x) = \frac{1}{e-x}(-1) + 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{x} + e^{-x}}{\frac{-1}{e-x} + 1} = \left[\frac{2}{-\frac{1}{e} + 1}\right] =$$

$$= \frac{2}{-\frac{1}{e} + 1} = \frac{2}{\frac{e-1}{e}} = \boxed{\frac{2e}{e-1}}$$

Reguła de l'Hospitala $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

Jeżeli funkcje f i g spełniają warunki:

- $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$,
- f' i g' istnieją w pewnym otoczeniu x_0 (poza, być może, samym punktem x_0) oraz istnieje granica $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ (właściwa lub niewłaściwa),

to

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Reguła de l'Hospitala: uwagi

- Obie reguły de l'Hospitala są prawdziwe także dla granic jednostronnych oraz dla granic w $+\infty$ lub w $-\infty$.
- Reguły de l'Hospitala można również wykorzystywać do obliczania granic typu $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 1^{∞}, ∞^0, 0^0.

$$\lim_{x \to 0^+} x^a \ln x \qquad a > 0$$

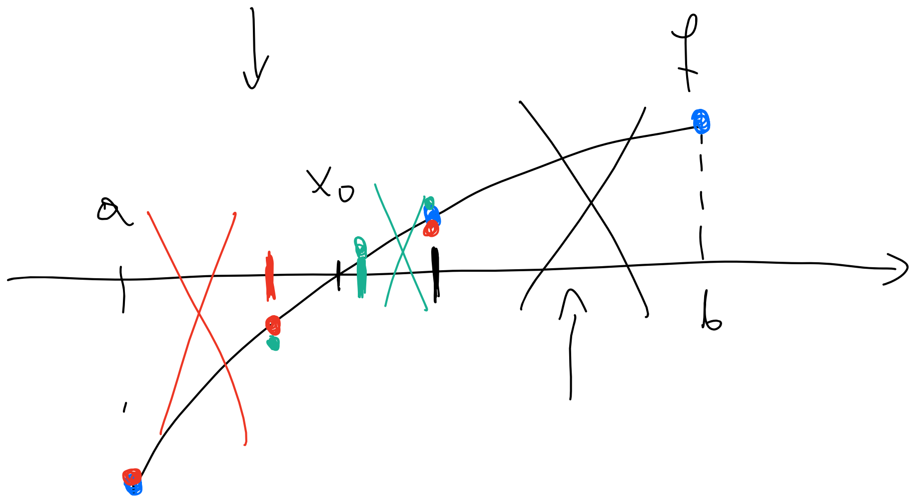
$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{x^a}{e^x} = 0 \quad \text{Ćw.}}$$

$$\lim_{x \to 0^+} x^a \ln x = [0 \cdot (-\infty)] = 0$$

$$x^a \ln x = \frac{\ln x}{x^{-a}}$$

$$\frac{1}{x} = x^{-1}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{(\ln x)'}{(x^{-a})'} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-a x^{-a-1}} = \lim_{x \to 0^+} -\frac{1}{a} \cdot x^a = 0$$



Metoda stycznych Newtona