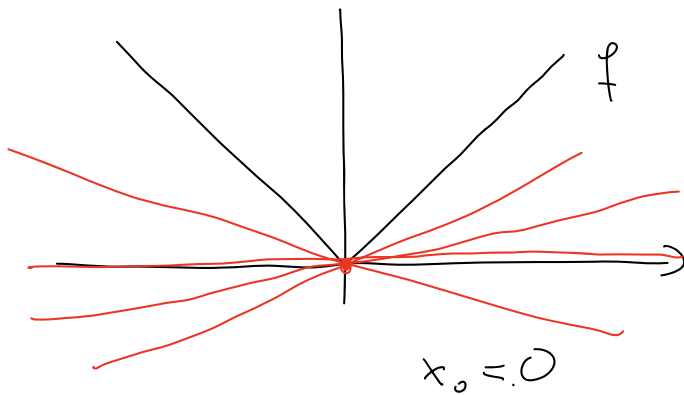


$f'(x_0)$ istnieje \Rightarrow f jest ciągła w x_0 . (WIEMY)

Czy: f ciągła w $x_0 \Rightarrow f'(x_0)$ istnieje?

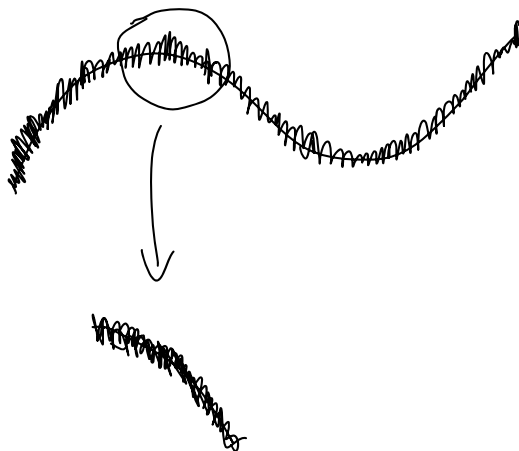


$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x| - |0|}{x} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ NIE ISTNIEJE

Fakt. Istnieją funkcje $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ciągłe, które nie posiadają pochodnej w żadnym punkcie. ▼
0



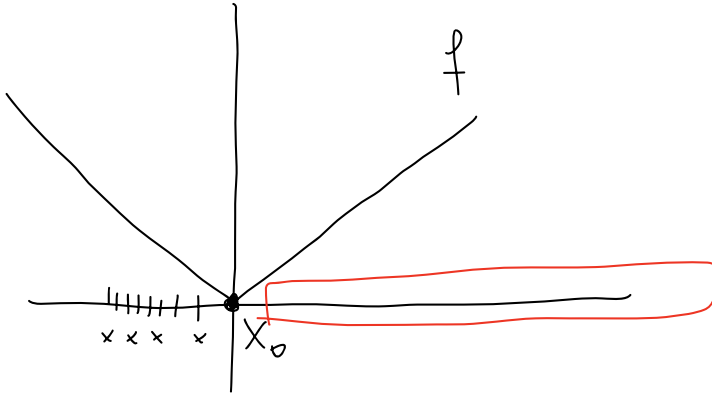
Ruch Browna	
Proces Wienera	

Pochodne jednostronne

Jeżeli funkcja f jest określona w pewnym otoczeniu lewostronnym punktu x_0 , to granicę

$$f'_-(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

o ile istnieje, nazywamy **pochodną lewostronną** funkcji f w punkcie x_0 .



Pochodne jednostronne

Jeżeli funkcja f jest określona w pewnym otoczeniu lewostronnym punktu x_0 , to granicę

$$f'_-(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

o ile istnieje, nazywamy **pochodną lewostronną** funkcji f w punkcie x_0 .

Jeżeli funkcja f jest określona w pewnym otoczeniu lewostronnym punktu x_0 , to granicę

$$f'_+(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

o ile istnieje, nazywamy **pochodną prawostronną** funkcji f w punkcie x_0 .

$$f(x) = |x|$$

$$f'_+(0) = 1$$

$$f'_-(0) = -1$$

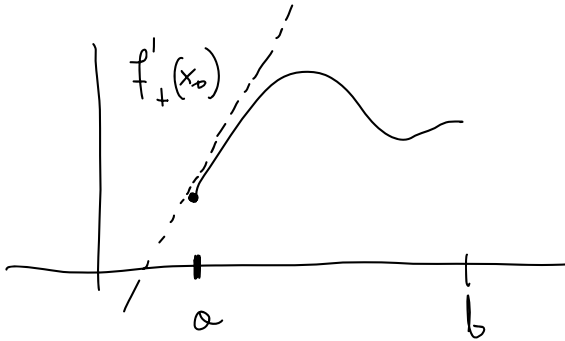
$f'(x_0)$ istnieje (\Leftrightarrow)

$f'_+(x_0)$ i $f'_-(x_0)$ istnieją

$$f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$$

Pochodna w przedziale domkniętym

Jeżeli funkcja f jest określona na przedziale $[a, b)$ i ma pochodną prawostronną w a , to mówimy, że jest ona **różniczkowalna** w a .

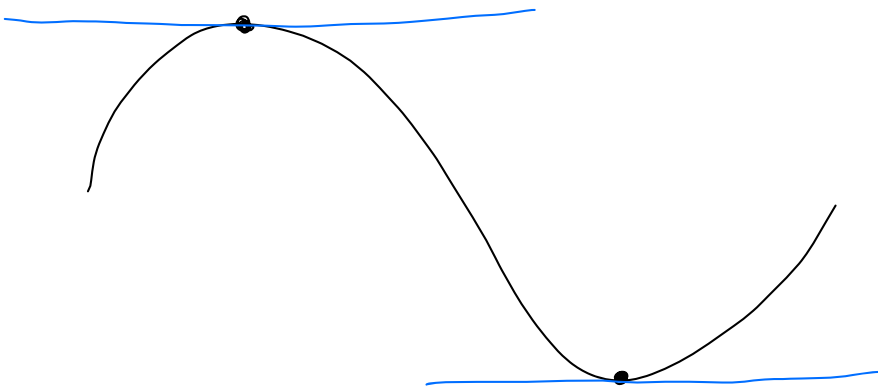
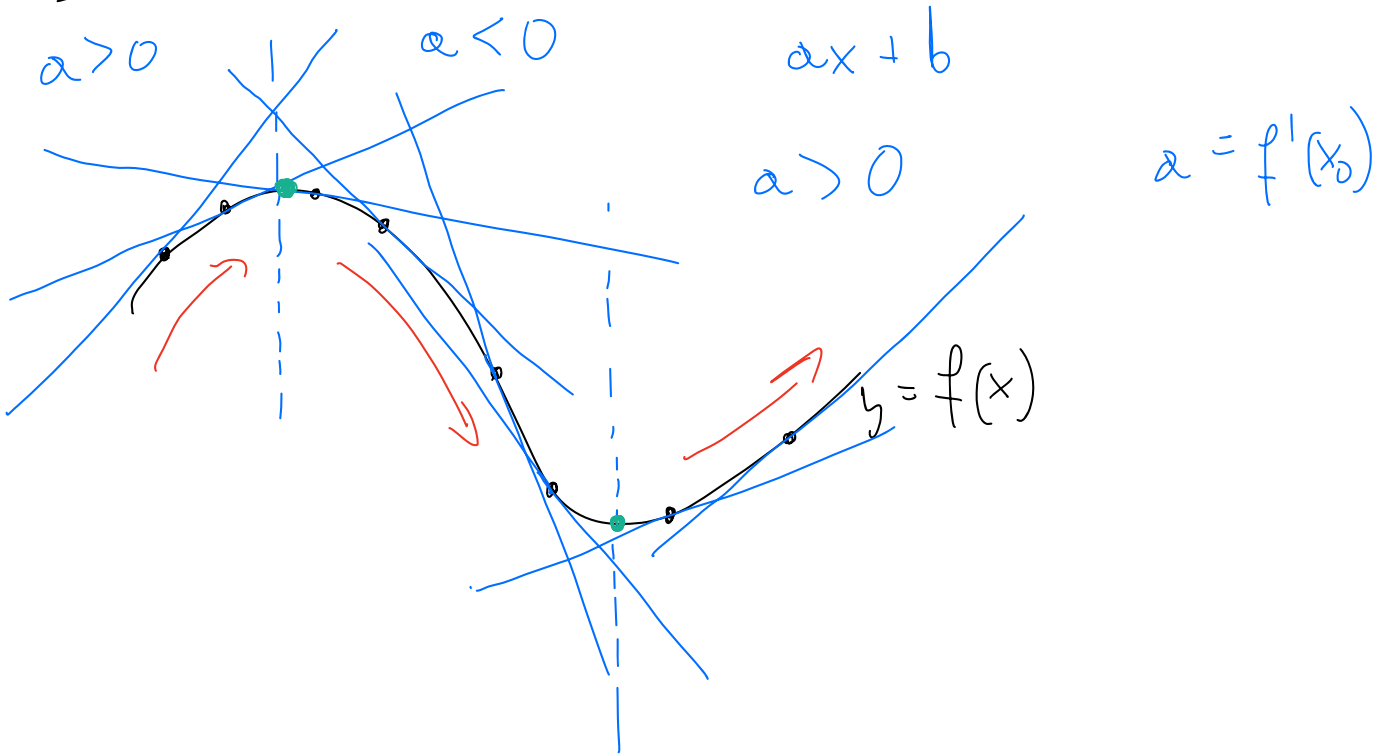
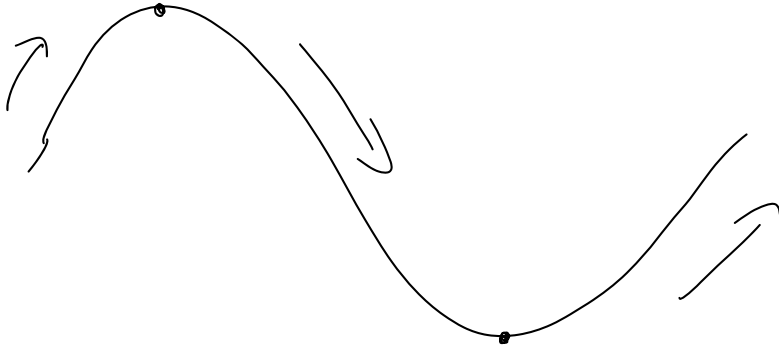


Pochodna w przedziale domkniętym

Jeżeli funkcja f jest określona na przedziale $[a, b)$ i ma pochodną prawostronną w a , to mówimy, że jest ona **różniczkowalna** w a .

Jeżeli funkcja f jest określona na przedziale $(a, b]$ i ma pochodną lewostronną w b , to mówimy, że jest ona **różniczkowalna** w b .

$$\sin \left(e^{\cos(\sqrt[3]{x})} \right)$$

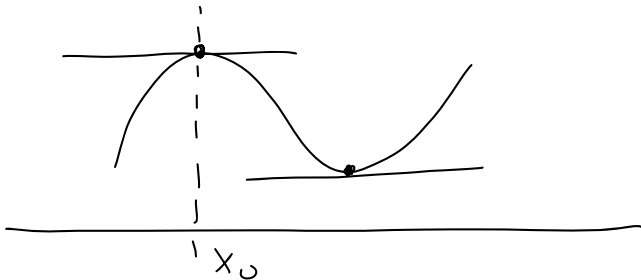


Pochodna a zachowanie funkcji

Twierdzenie Fermata

Jeżeli funkcja $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ osiąga w punkcie x_0 kres dolny lub górny swoich wartości oraz istnieje pochodna $f'(x_0)$, to

$$f'(x_0) = 0.$$



x_0 jest kresem górnym:

$$f(x_0) \geq f(x), \quad x \in D_f$$

$$f(x) - f(x_0) \leq 0$$

$$\boxed{f(x) - f(x_0)} \leq 0$$

$$\boxed{x - x_0} < 0, \quad x < x_0$$
$$> 0, \quad x > x_0$$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

$f'(x_0)$ istnieje

$$\boxed{f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = f'(x_0) = 0}$$

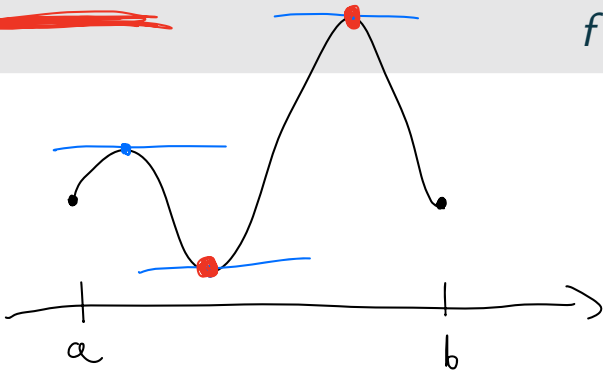
\Leftarrow

$$\boxed{f'_-(x_0) \geq 0 \quad f'_+(x_0) \leq 0}$$

Twierdzenie Rolle'a

Jeżeli funkcja f jest ciągła w przedziale $[a, b]$ oraz różniczkowalna w przedziale (a, b) , a dodatkowo $f(a) = f(b)$, to istnieje taki punkt $c \in (a, b)$, że

$$f'(c) = 0.$$



(I) f jest stała
 $f'(x) = 0, x \in (a, b)$

(II) f nie jest stała
istnieje pkt. $c \in (a, b)$, w którym
jest osiągnięty kwes
(dolek lub górak)

Tw. Heierstrassa
Funkcja ciągła na
przedziale domkniętym
osiąga swoje kwesy.



Stosunek tu. Fermate.

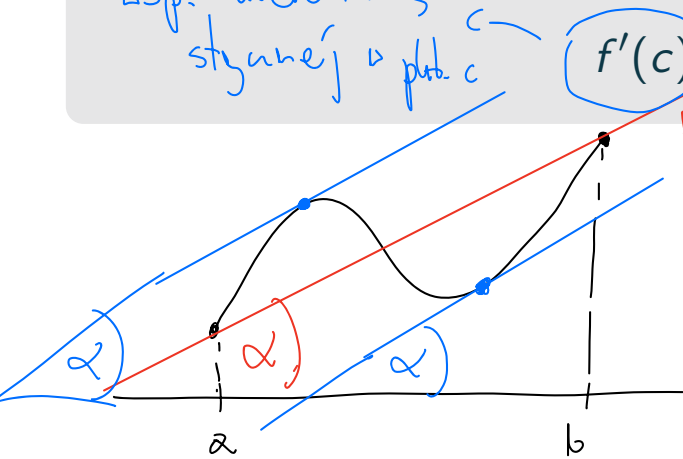
Twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej

Jeżeli funkcja f jest ciągła w przedziale $[a, b]$ oraz różniczkowalna w przedziale (a, b) , to istnieje taki punkt $c \in (a, b)$, że

usp. kierunkowy stycznej w pkt. c

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



usp. kierunkowy stycznej

$y = Ax + B$ styczna
pochodzące punkt $(a, f(a))$ i $(b, f(b))$

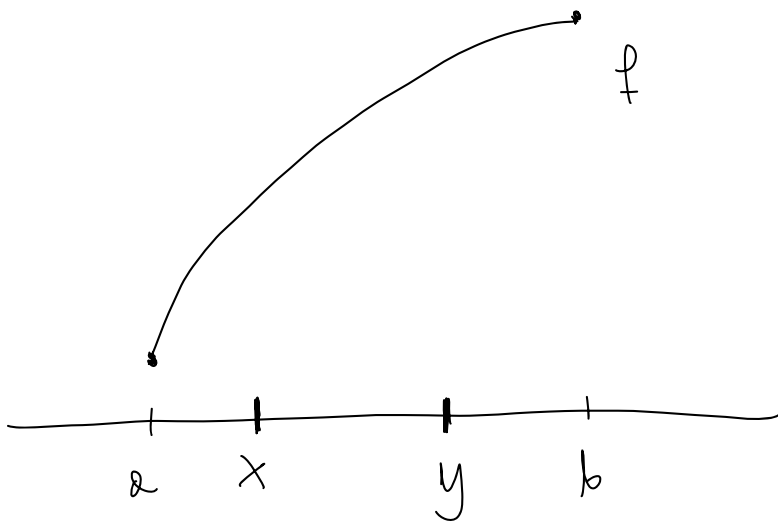
$$g(x) = f(x) - (Ax + B)$$

$$g(a) = f(a) - f(a) = 0$$

$$g(b) = f(b) - f(b) = 0$$

$$\begin{aligned} \forall c \in (a, b) \quad g'(c) &= 0 \\ g'(c) &= f'(c) - A = 0 \\ f'(c) &= A \end{aligned}$$

- g jest ciągła jako różnica f ciągłych
 - g jest różniczkowalna w (a, b) jako różnica f różniczkowalnej.
- Stosujemy tw. Rolle'a do funkcji g .



Tw. Lagrange'a

$$\forall c \in (a, b) \quad f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$x, y \in [a, b], \quad x < y$$

Stosujemy tw. Lagrange'a na $[x, y]$.

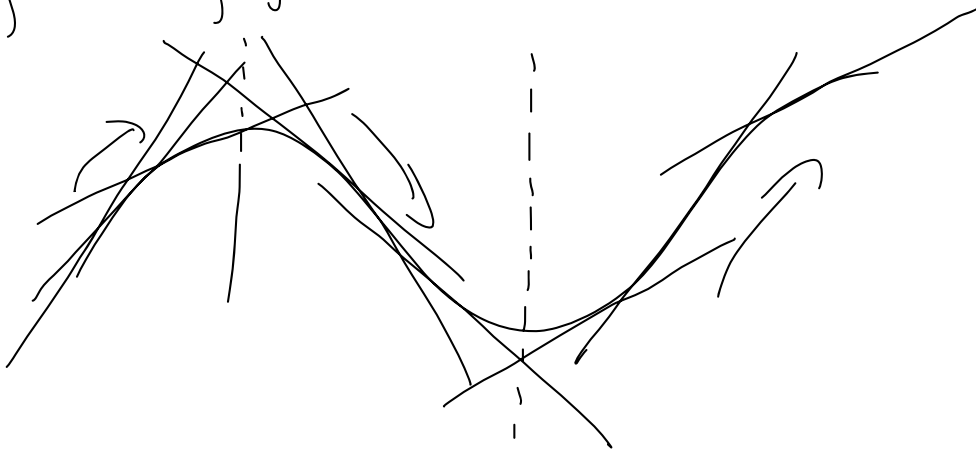
$$\forall c \in (x, y) \quad f'(c) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} > 0$$

Gdybyśmy uśrednili, że $f'(t) > 0$ dla $t \in (a, b)$,
to

$$f(y) - f(x) = \overbrace{f'(c)}^{> 0} \overbrace{(y - x)}^{> 0} > 0$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x) < f(y)} \quad \left. \begin{array}{l} x, y \in [a, b], \quad x < y \\ \text{wtedy } f \text{ jest} \end{array} \right\}$$

x, y były wybrane dowolnie, więc f jest
funkcją rosnącą!



Pochodna a monotoniczność

a, b mogą być
różne $\pm \infty$

Twierdzenie

$[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$, (a, b)

Niech funkcja $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ określona na dowolnym przedziale I będzie **ciągła** na I oraz **różniczkowalna** wewnątrz I . Wtedy:

\rightsquigarrow f jest stała na I $\iff f' = 0$ wewnątrz I .

\rightsquigarrow f jest rosnąca na I $\iff f' \geq 0$ wewnątrz I .

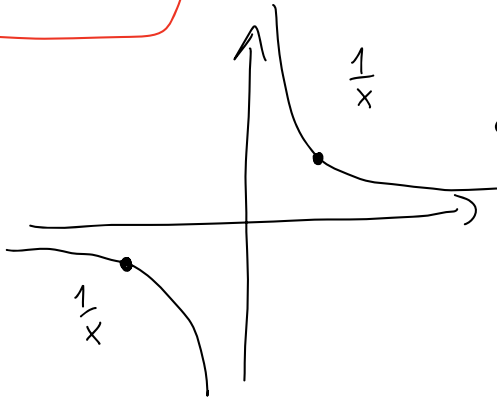
\rightsquigarrow f jest malejąca na I $\iff f' \leq 0$ wewnątrz I .

nierosnąca
niemalejąca

I musi być przedziałem!

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$$

← NIE JEST MALEJĄCA



Pochodna a ścisła monotoniczność

Twierdzenie

Niech funkcja $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ określona na dowolnym przedziale I będzie **ciągła** na I oraz **różniczkowalna** wewnątrz I . Jeżeli funkcja f' nie jest stale równa 0 na żadnym podprzedziale przedziału I , to

↪ f jest **ściśle** rosnącą na I $\equiv f' \geq 0$ wewnątrz I .

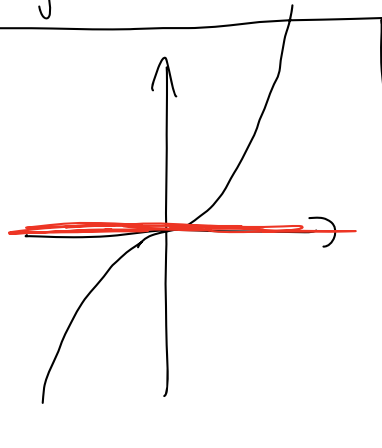
↪ f jest **ściśle** malejącą na I $\equiv f' \leq 0$ wewnątrz I .

$f'(x) > 0 \Rightarrow f$ jest ściśle rosn.

$$f(x) = x^3 \quad D_f = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = 3x^2 \geq 0$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$



1. Uzasadnij, że

$$\sin x < x$$

dla dowolnego $x > 0$.

$$\sin x < x \quad (\Leftrightarrow) \quad x - \sin x > 0.$$

Niech

$$f(x) = x - \sin x, \quad D_f = [0, +\infty).$$

Mamy

$$f'(x) = 1 - \cos x, \quad x \in (0, +\infty).$$

$$f'(x) = 1 - \underbrace{\cos x}_{-1 \leq \cos x \leq 1} \geq 0, \quad x \in (0, +\infty).$$

$$f'(x) = 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad x = 2k\pi, \quad k \in \{0, 1, 2, \dots\}.$$

$\Rightarrow f'$ nie jest równa 0 na żadnym podprzedziale $(0, +\infty)$.

$\Rightarrow f$ jest funkcją rosnącą na $[0, +\infty)$.

W szczególności

$$f(0) < f(x), \quad x \in (0, +\infty).$$

$$0 - \sin 0 < x - \sin x$$

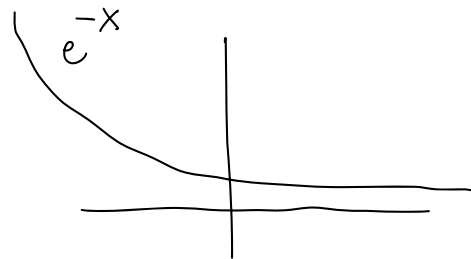
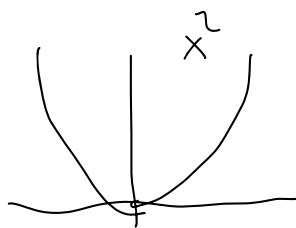
$$0 < x - \sin x, \quad x \in (0, +\infty).$$

2. Zbadaj monotonicność funkcji

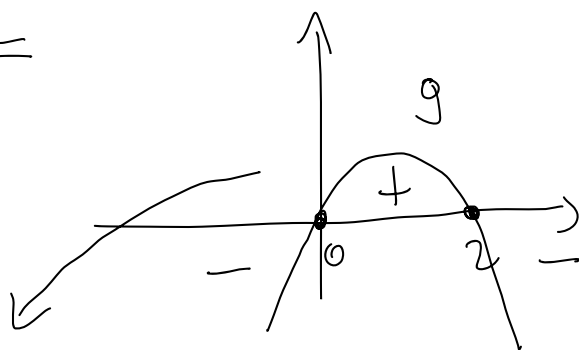
$$f(x) = x^2 e^{-x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$x \in \mathbb{R}.$$

$$y e^y - x e^x$$

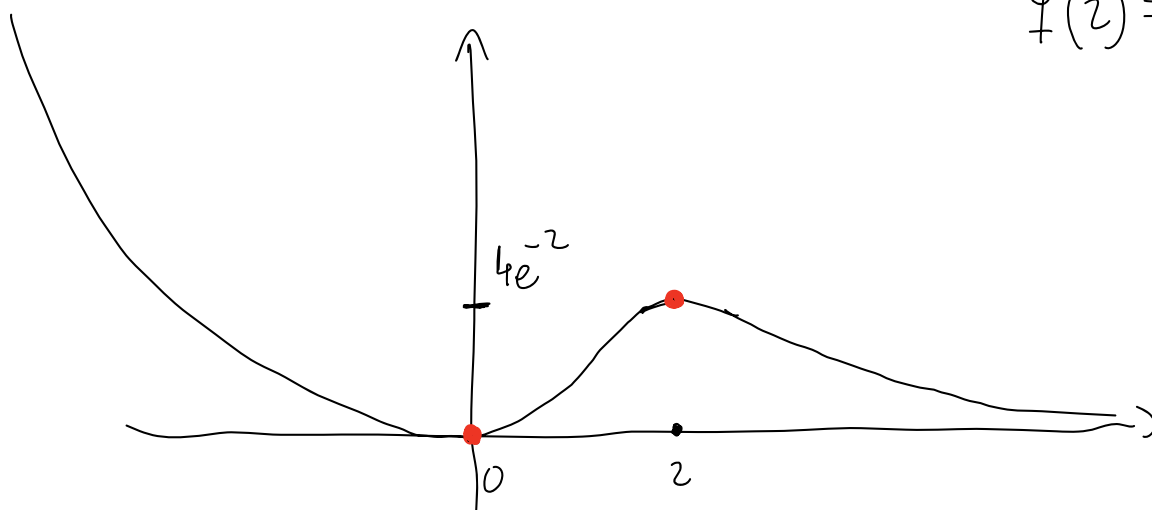


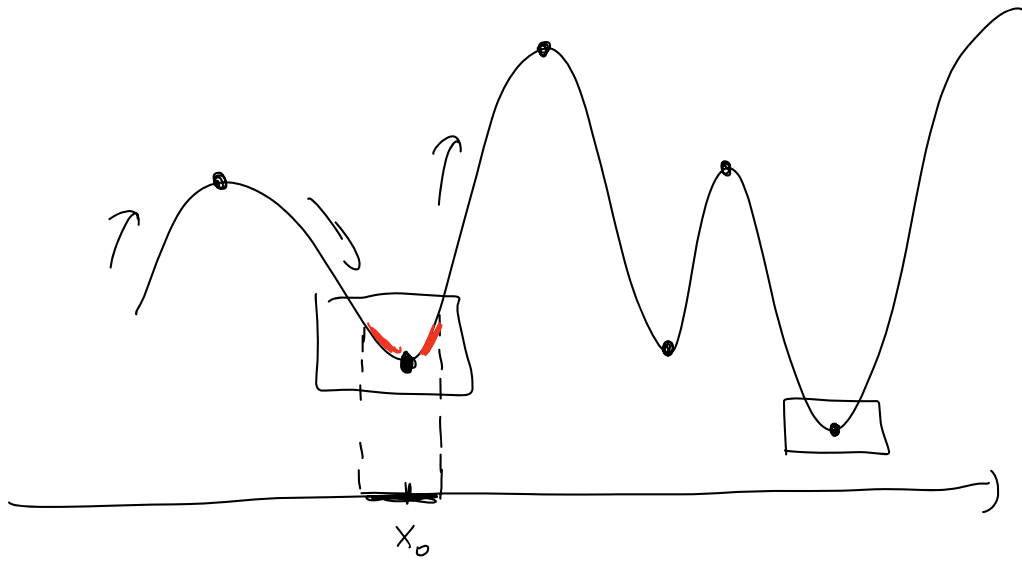
$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^2)' e^{-x} + x^2 (e^{-x})' = \\ &= 2x e^{-x} + x^2 e^{-x} (-x)' = \\ &= 2x e^{-x} - x^2 e^{-x} = \\ &= \underbrace{e^{-x}}_{>0} \underbrace{x(2-x)}_g \end{aligned}$$



x	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, +\infty)$
f'	-	+	-
f			

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ f(2) &= 4e^{-2} \end{aligned}$$





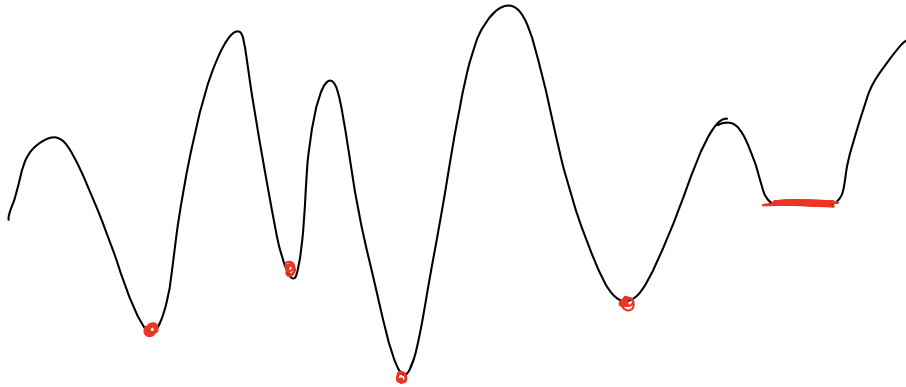
Ekstrema

Mówimy, że funkcja f ma w punkcie x_0 **minimum lokalne**, jeżeli

$$\forall \delta > 0 \quad \bigwedge_{x \in S(x_0, \delta)} f(x) \geq f(x_0).$$

$\text{---} (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$

Jeżeli nierówność \geq zamienimy na $>$, to powiemy, że jest to **minimum lokalne właściwe**.

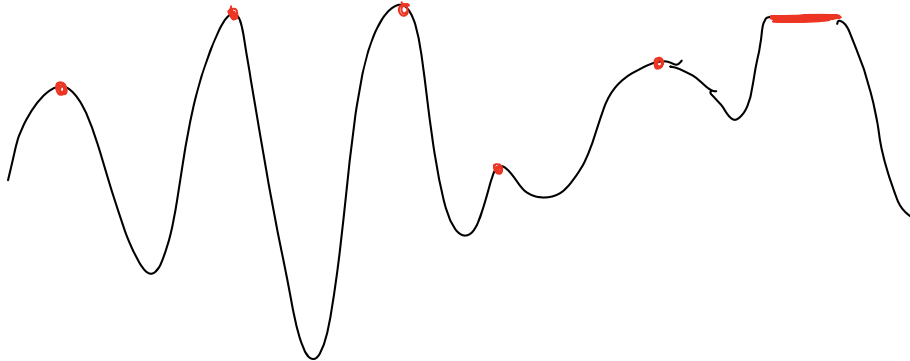


Ekstrema

Mówimy, że funkcja f ma w punkcie x_0 **maksimum lokalne**, jeżeli

$$\forall \delta > 0 \quad \bigwedge_{x \in S(x_0, \delta)} f(x) \leq f(x_0).$$

Jeżeli nierówność \leq zamienimy na $<$, to powiemy, że jest to **maksimum lokalne właściwe**.

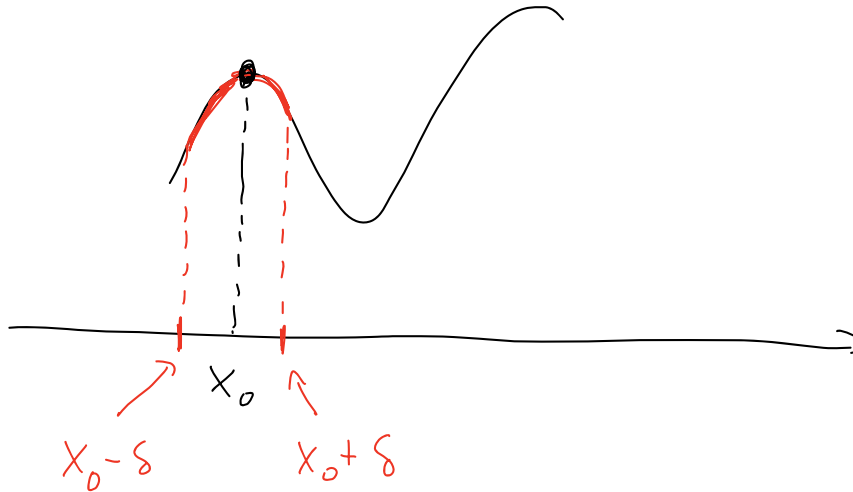


Warunek konieczny istnienia ekstremum

Twierdzenie Fermata

Jeśli funkcja $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ma w punkcie x_0 ekstremum lokalne i jest w tym punkcie różniczkowalna, to

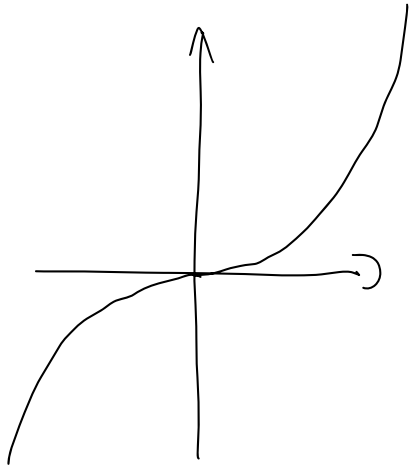
$$f'(x_0) = 0.$$



$$f(x) = x^3$$

$$f'(x) = 3x^2$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$



x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, +\infty)$
f'	+	0	+

Warunek dostateczny istnienia ekstremum

Niech funkcja $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie **ciągła** w punkcie x_0 oraz dla pewnego $\delta > 0$ **różniczkowalna** w zbiorze $S(x_0, \delta)$.

~> Jeżeli $f'(x) < 0$ dla każdego $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ oraz $f'(x) > 0$ dla każdego $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, to f ma w punkcie x_0 minimum lokalne właściwe,

~> Jeżeli $f'(x) > 0$ dla każdego $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ oraz $f'(x) < 0$ dla każdego $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, to f ma w punkcie x_0 maksimum lokalne właściwe.

