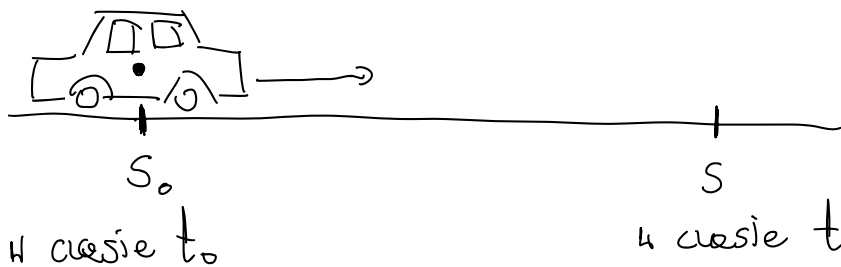


1. Rachunek różniczkowy (podrodzaje)
2. Rachunek całkowy (całki)
3. Ciągły zespolone
4. Algebra liniowa i geometria/grafika

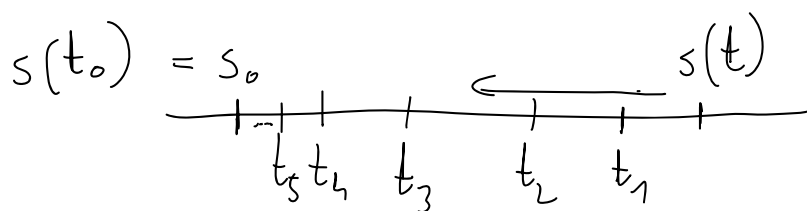
Prędkość?



$$v'_{\text{średnie}} = \frac{s - s_0}{t - t_0}$$

$$v = \frac{s}{t}$$

↖ droga
↘ czas



$s(t)$ - funkcja
drogi od czasu

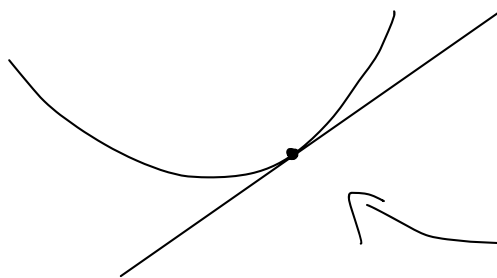
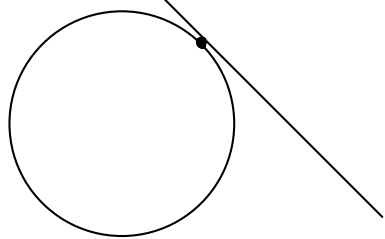
$$v'_{\text{średnie}}(t) = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} v'_{\text{średnie}}(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} \stackrel{\text{DEF!}}{=} v_{\text{chwilowa}}(t_0)$$

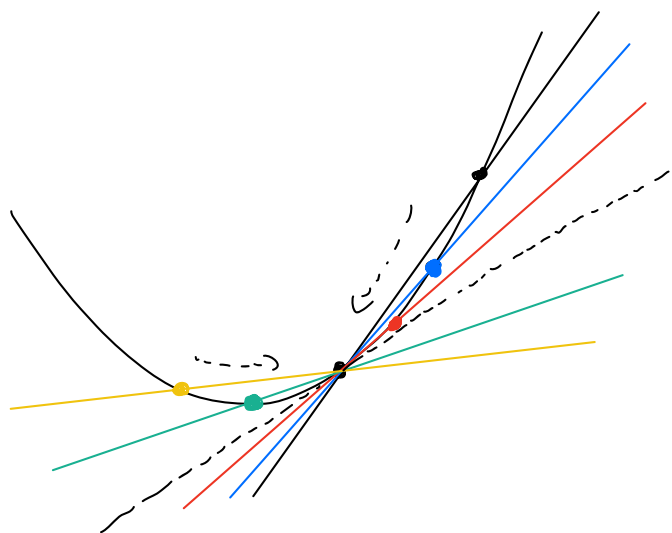
Newton

Leibniz

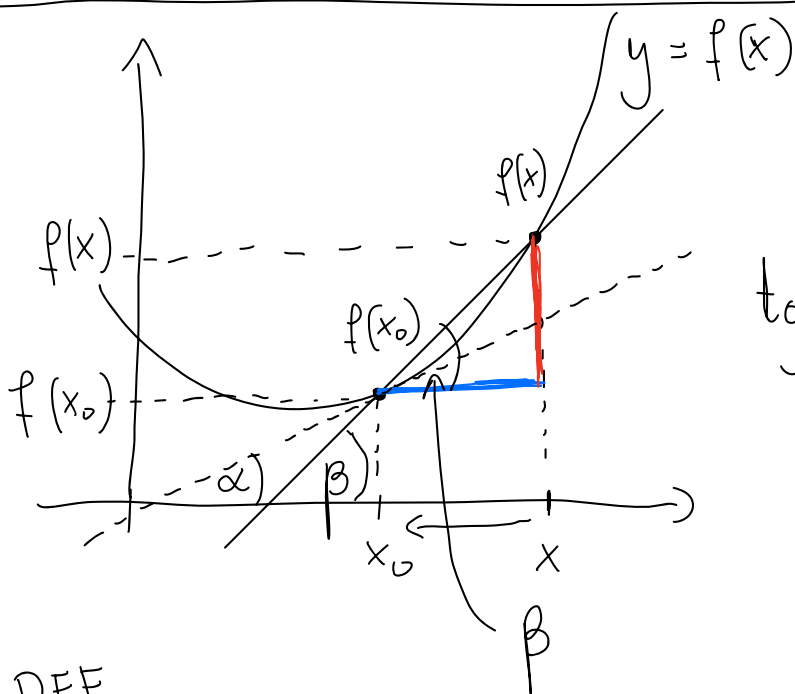
Styczna?



?



← styczna
(jako granica
siecznych)



$$\operatorname{tg} \beta = \frac{d\tau(\text{I})}{d\tau(\text{—})} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

ilość
różnicowy

DEF

$$\alpha = \lim_{x \rightarrow x_0} \beta(x)$$

DEF

$$\operatorname{tg} \alpha = \lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{tg} \beta(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

DEF. WSP. KIERUNKÓW
WEGO
STYCZNEJ

Iloraz różnicowy

Niech $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ oraz $x, x_0 \in (a, b)$, $x \neq x_0$. Liczbę

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

nazywamy **ilorazem różnicowym** funkcji f w punkcie x_0 dla przyrostu $x - x_0$.

Pochodna funkcji

Niech $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ oraz $x_0 \in (a, b)$. Jeżeli istnieje (właściwa) granica

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

to nazywamy ją **pochodną funkcji** f w punkcie x_0 i oznaczamy

$$f'(x_0).$$

Mówimy wtedy, że funkcja f jest **różniczkowalna** w punkcie x_0 .

$$f'(x_0)$$

$$\dot{f}(x_0)$$

$$\frac{df}{dx}(x_0)$$

$$Df(x_0)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h = x - x_0, \quad x = x_0 + h}} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$1) \quad f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 \quad \left\{ (x^2)' = 2x \right. \\ x_0 \in \mathbb{R} \quad f'(x_0) = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \left[\frac{0}{0} \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\cancel{(x - x_0)}(x + x_0)}{\cancel{x - x_0}} = \lim_{x \rightarrow x_0} (x + x_0) = x_0 + x_0 = 2x_0$$

$$f'(x_0) = 2x_0 \quad \leadsto \quad f'(x) = 2x, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\downarrow \quad (x^2)' = 2x$$

$$\boxed{\text{Cw.}} \quad f(x) = x^n, \quad f(x) = \sqrt[n]{x}, \quad f(x) = x^a, \quad a > 0$$

$$2. \quad f(x) = \sin x, \quad f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x_0 \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{(\sin x)' = \cos x}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x_0 + h) - \sin x_0}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \sin\left(\frac{x_0 + h - x_0}{2}\right) \cos\left(\frac{x_0 + h + x_0}{2}\right)}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2) \sin \frac{h}{2} \cos\left(x_0 + \frac{h}{2}\right)}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \left(\frac{h}{2} \right)}{\frac{h}{2}} \cdot \cos \left(x_0 + \frac{h}{2} \right) \right) = 1 \cdot \cos x_0 = \boxed{\cos x_0}$$

$\downarrow h \rightarrow 0$
 $\boxed{1}$

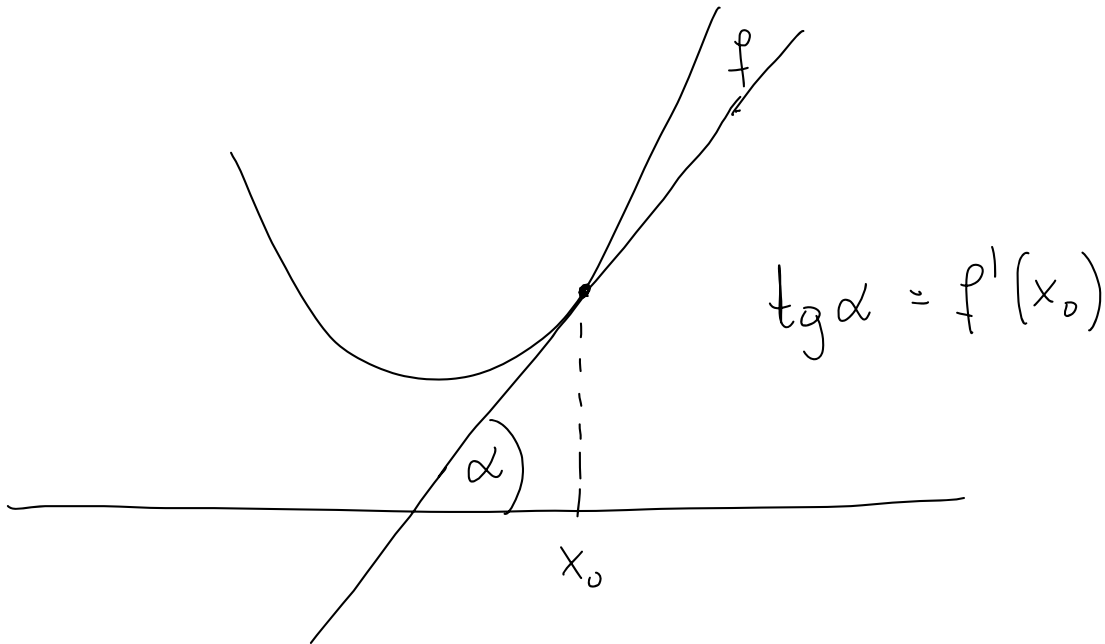
$\downarrow h \rightarrow 0$
 x_0
 $\downarrow h \rightarrow 0$ { z ciągłości cos }
 $\cos x_0$

$\boxed{\text{Cw.}}$

$$f(x) = \ln x, \\ f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

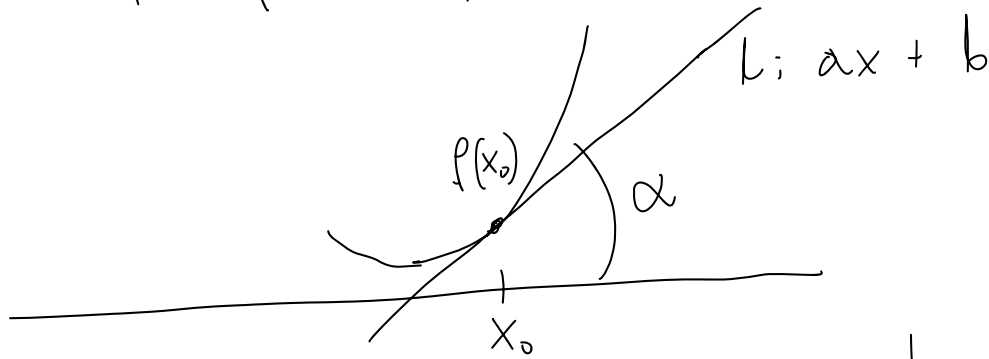
Styczna

Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x_0 , to **styczną** do wykresu funkcji f w punkcie x_0 nazywamy prostą przechodzącą przez $f(x_0)$ o współczynniku kierunkowym równym $f'(x_0)$.



jak rozumieć ten stągna?

$$f: D_f \rightarrow \mathbb{R}, \quad x_0 \in (a, b)$$



$$1) \quad ax_0 + b = f(x_0) \quad \leftarrow \text{proste prowadzi przez } (x_0, f(x_0))$$

$$2) \quad a = f'(x_0)$$

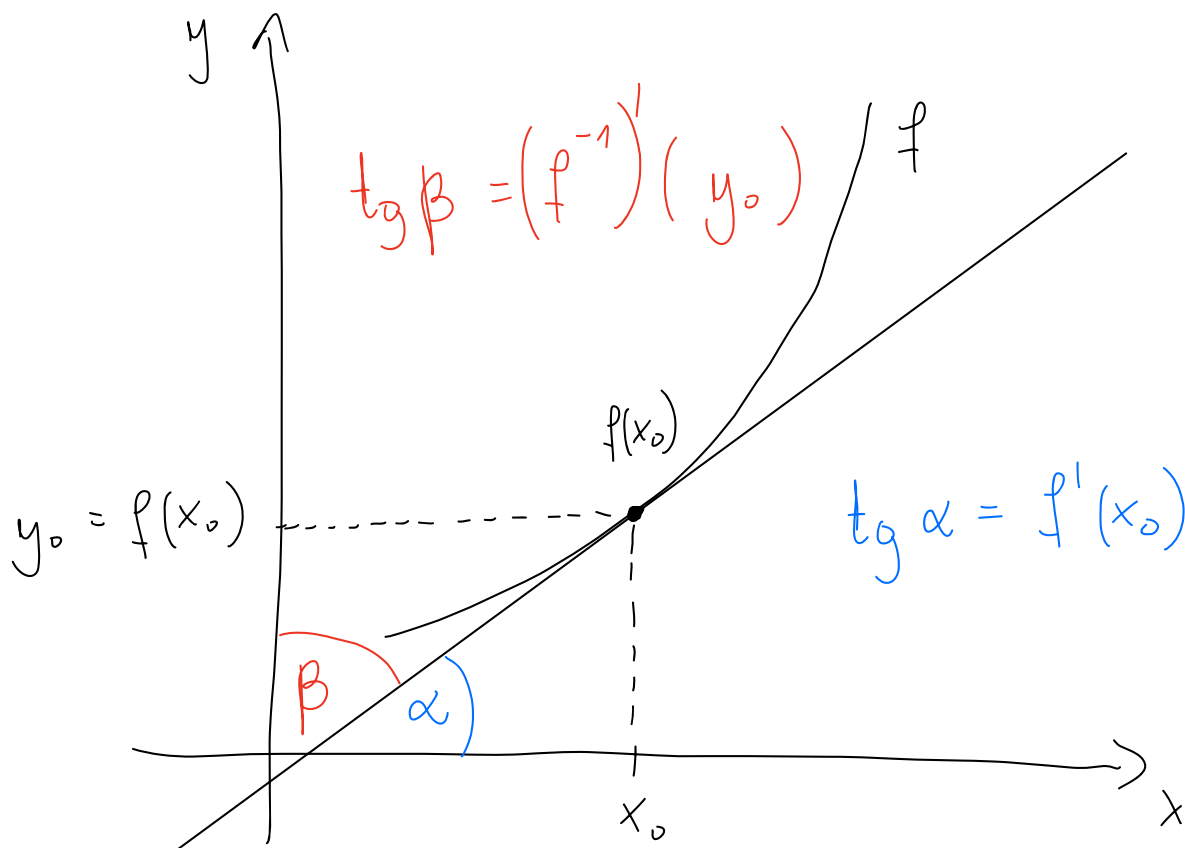
$$ax_0 + b = f(x_0)$$

$$b = f(x_0) - ax_0 = f(x_0) - f'(x_0)x_0$$

$$l: ax + b = f'(x_0)x + f(x_0) - f'(x_0)x_0 =$$

$$= \boxed{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}$$

f jest bijekcja, f^{-1} istnieje
 f' istnieje $\Rightarrow (f^{-1})' = ?$



$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{\text{tg } \beta} = \text{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \text{ctg } \alpha = \boxed{\frac{1}{\text{tg } \alpha}}$$

$$\underline{(f^{-1})'(y_0)} = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{\underline{f'(f^{-1}(y_0))}}$$

$$f(x_0) = y_0$$

$$x_0 = f^{-1}(y_0)$$

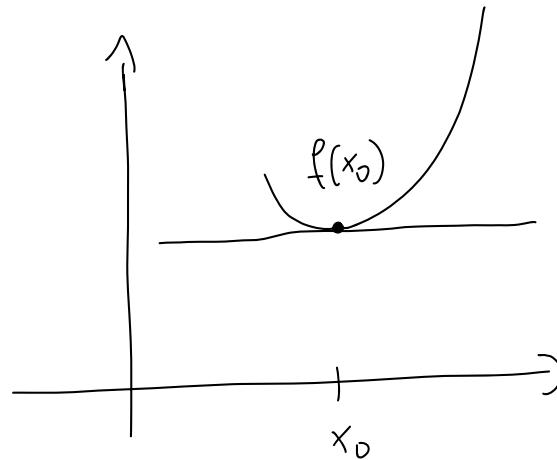
Pochodna funkcji odwrotnej

gwarantuje
istnienie f^{-1}
↓

Twierdzenie

Jeżeli funkcja f określona w przedziale (a, b) jest ciągła i ściśle monotoniczna oraz $f'(x_0) \neq 0$, to funkcja odwrotna f^{-1} jest różniczkowalna w punkcie $y_0 = f(x_0)$ oraz

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$



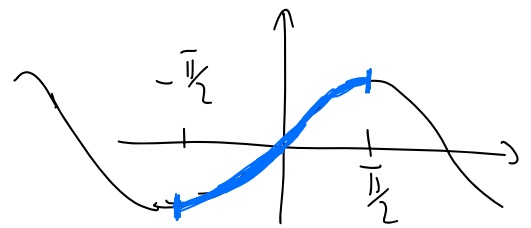
$$f'(x_0) = 0$$

$$3) \quad g(x) = \arcsin x$$

$$g: [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$f(x) = \sin x, \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$f^{-1}(x) = \arcsin x = g(x)$$



$$y = f(x), \quad x = f^{-1}(y)$$

$$g'(y) = (f^{-1})'(y) \stackrel{\text{th.}}{=} \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\cos x} =$$

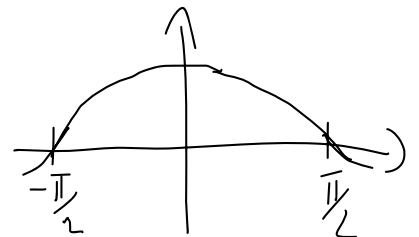
$$= \frac{1}{\cos(f^{-1}(y))} = \frac{1}{\cos(\arcsin y)}$$

$$(\arcsin y)' = \frac{1}{\cos(\arcsin y)}, \quad y \in (-1, 1)$$

$$|\cos x| = \sqrt{\cos^2 x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\cos x = \sqrt{\cos^2 x}, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$$



$$\frac{1}{\cos(\arcsin y)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin y)}}$$

$$\text{in } \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \text{ d.h. } y \in (-1, 1)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - (\sin(\arcsin y))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}, \quad y \in (-1, 1)$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Pochodne funkcji elementarnych

$$\rightsquigarrow (c)' = 0$$

$$\rightsquigarrow (x^a)' = ax^{a-1} \quad a > 0$$

$$\rightsquigarrow (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad a = \frac{1}{2}$$

$$\rightsquigarrow \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \quad a = -1$$

$$\rightsquigarrow (e^x)' = e^x$$

$$\rightsquigarrow (a^x)' = a^x \ln a$$

$$\rightsquigarrow (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$\rightsquigarrow (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$\rightsquigarrow (\sin x)' = \cos x$$

$$\rightsquigarrow (\cos x)' = -\sin x$$

$$\rightsquigarrow (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\rightsquigarrow (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\rightsquigarrow (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\rightsquigarrow (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\rightsquigarrow (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\rightsquigarrow (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

Różniczkowalność a ciągłość

Twierdzenie

Jeżeli funkcja jest różniczkowalna w pewnym punkcie, to jest w tym punkcie ciągła.

$$f \text{ jest ciągła w } x_0 \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Jeśli $f'(x_0)$ istnieje, to istnieje

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Wtedy

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = \lim_{x \rightarrow x_0} \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\substack{\downarrow x \rightarrow x_0 \\ f'(x_0)}} \cdot \underbrace{(x - x_0)}_{\substack{\downarrow x \rightarrow x_0 \\ 0}} = f'(x_0) \cdot 0 = 0$$

f, g Zaimmy, ie $f'(x_0)$ i $g'(x_0)$ istnieją?

$$(f \cdot g)'(x_0) = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f(x) - f(x_0))g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\downarrow x \rightarrow x_0} \underbrace{g(x)}_{\downarrow x \rightarrow x_0} + f(x_0) \underbrace{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}}_{\downarrow x \rightarrow x_0} \right] =$$

$\downarrow x \rightarrow x_0$ $\downarrow x \rightarrow x_0$ $\downarrow x \rightarrow x_0$
 $f'(x_0)$ $g(x_0)$ $g'(x_0)$

2 ciągłości g
w x_0

$$= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

Algebraiczne własności pochodnej

Twierdzenie

Jeżeli funkcje f i g są różniczkowalne w punkcie x_0 , to

~> $(c \cdot f)'(x_0) = c \cdot f'(x_0)$ dla dowolnego $c \in \mathbb{R}$,

~> $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$,

~> $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$,

~> $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$

o ile $g(x_0) \neq 0$

!
CW

Pochodna funkcji złożonej

Twierdzenie

Jeżeli funkcja g ma pochodną w punkcie x_0 , a funkcja f ma pochodną w punkcie $g(x_0)$, to

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0).$$

$$(f(g))' = f'(g) \cdot g'$$

$$f(x) = \ln\left(\frac{x^2+1}{\arccot x}\right) \cdot \sin\left(e^{\cos^3 \sqrt{x}}\right)$$

$$f'(x) = \left(\ln\left(\frac{x^2+1}{\arccot x}\right)\right)' \cdot \sin\left(e^{\cos^3 \sqrt{x}}\right) + \ln\left(\frac{x^2+1}{\arccot x}\right) \cdot \left(\sin\left(e^{\cos^3 \sqrt{x}}\right)\right)' =$$

$$\left(\ln\left(\frac{x^2+1}{\arccot x}\right)\right)' = \frac{1}{\frac{x^2+1}{\arccot x}} \cdot \left(\frac{x^2+1}{\arccot x}\right)' =$$

$$= \frac{\arccot x}{x^2+1} \cdot \frac{(x^2+1)' \arccot x - (x^2+1)(\arccot x)'}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{\arccot x}{x^2+1} \cdot \frac{2x \arccot x - (x^2+1) \cdot \frac{1}{x^2+1}}{(x^2+1)^2}$$

$$\left(\sin\left(e^{\cos^3 \sqrt{x}}\right)\right)' = \cos\left(e^{\cos^3 \sqrt{x}}\right) \cdot \left(e^{\cos^3 \sqrt{x}}\right)' = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)'$$

$$= \cos\left(e^{\cos^3 \sqrt{x}}\right) \cdot e^{\cos^3 \sqrt{x}} \cdot \left(\cos^3 \sqrt{x}\right)' =$$

$$= \cos\left(e^{\cos^3 \sqrt{x}}\right) \cdot e^{\cos^3 \sqrt{x}} \cdot \left(-\sin^3 \sqrt{x}\right) \cdot \left(\sqrt{x}\right)' =$$

$$= \cos\left(e^{\cos^3 \sqrt{x}}\right) \cdot e^{\cos^3 \sqrt{x}} \cdot \left(-\sin^3 \sqrt{x}\right) \cdot \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} =$$