Zestaw 6 — Teoria grafów

1. Niech $G = (V, E)$ będzie dowolnym grafem, niekoniecznie prostym. Oznaczmy przez D_k, $k \geqslant 0$ liczbę wierzchołków tego grafu, które mają stopień k. Uzasadnij, że zachodzi równość

$$D_1 + 2D_2 + 3D_3 + \cdots = 2|E|.$$

Uwaga. Każda pętla zwiększa stopień wierzchołka o dwa.

2. Przy oznaczeniach z zadania 1 uzasadnij, że

$$-D_0 + D_2 + 2D_3 + 3D_4 + \cdots = 2|E| - |V|.$$

3. Graf G ma po trzy wierzchołki stopnia 1, 2 i 3. Wiedząc, że pozostałe wierzchołki grafu G są stopnia 4 oraz, że graf G ma 13 krawędzi, znajdź liczbę wierzchołków tego grafu.

4. Narysuj graf, dla którego

$$D_0 = 1, \quad D_1 = 1, \quad D_2 = 0, \quad D_3 = 3, \quad D_4 = 1$$

oraz $D_k = 0$ dla $k \geqslant 5$.

5. Uzasadnij, że nie istnieje graf, dla którego

$$D_0 = 0, \quad D_1 = 1, \quad D_2 = 0, \quad D_3 = 2, \quad D_4 = 1$$

oraz $D_k = 0$ dla $k \geqslant 5$.

6. Wykaż, że w dowolnym grafie prostym, który ma przynajmniej dwa wierzchołki, pewne dwa wierzchołki mają ten sam stopień.

7. Załóżmy, że dla grafu prostego G istnieje taka liczba całkowita $k \geqslant 2$, że dla każdego wierzchołka $v \in V(G)$ zachodzi $\deg v \geqslant k$. Wykaż, że graf G zawiera cykl o długości co najmniej $k + 1$.

8. Niech G będzie grafem prostym, który nie zawiera jako podgrafu K_3. Załóżmy, że $|V(G)| = 2k$ dla pewnego $k \geqslant 1$. Wykaż, że $|E(G)| \leqslant k^2$ i sprawdzić, że tego oszacowania nie można poprawić.

9. Załóżmy, że graf G jest drzewem i $|V(G)| \geqslant 2$. Wykaż, że w grafie G istnieją co najmniej dwa wierzchołki o stopniu równym 1.

10. Wykaż, że w dowolnym drzewie istnieje dokładnie jedno centrum, albo dwa sąsiednie centra.
Uwaga. Dla grafu spójnego *centrum* nazywamy dowolny wierzchołek, którego maksymalna odległość do dowolnego innego wierzchołka tego grafu jest możliwie najmniejsza.

11. Czy każde drzewo o przynajmniej dwóch wierzchołkach jest grafem dwudzielnym?

12. Narysuj graf, który ma 5 wierzchołków oraz

a) nie jest hamiltonowski i nie jest eulerowski,
b) nie jest hamiltonowski, ale jest eulerowski,
c) jest hamiltonowski i nie jest eulerowski,
d) jest hamiltonowski i eulerowski.

13. Niech G będzie prostym, planarnym grafem spójnym. Wykaż, że jeżeli $|V(G)| \geqslant 3$, to

$$|E(G)| \leqslant 3|V(G)| - 6.$$

14. Załóżmy, że graf G jest spójny i planarny. Wykaż, że jeżeli $|V(G)| \geqslant 1$, to istnieje taki $v \in V(G)$, że $\deg v \leqslant 5$.

15. Załóżmy, że graf planarny G nie ma podgrafu, który jest trójkątem K_3. Wykaż, że $\chi(G) \leqslant 4$.

16. Na wymyślonych przez siebie grafach wykonaj algorytmy Kruskala, Fleury'ego i Dijkstry.