Zestaw 4 — Relacje

1. Sprawdź, czy następujące relacje R w zbiorze X są zwrotne, symetryczne, antysymetryczne, przechodnie i spójne:

a) $X = \mathbb{Z}$, $xRy \Leftrightarrow 3 \mid x - y$,
b) $X = \mathbb{N}$, $xRy \Leftrightarrow 2 \mid x + y$,
c) $X = \mathbb{N}$, $xRy \Leftrightarrow 3 \mid x + y$,
d) $X = \mathbb{Z}$, $xRy \Leftrightarrow 5 \mid x^3 - y^3$,
e) $X = \mathbb{R}$, $xRy \Leftrightarrow x^2 = y^2$,
f) $X = \mathbb{R}$, $xRy \Leftrightarrow x^2 \neq y^2$,
g) $X = \mathbb{R}$, $xRy \Leftrightarrow x^3 = y^3$,
h) $X = \mathbb{R}$, $xRy \Leftrightarrow |x| < |y|$,
i) $X = \mathbb{R}$, $xRy \Leftrightarrow |x| + |y| = 3$,
j) $X = \mathbb{N}$, $xRy \Leftrightarrow x > y \vee y > x$,
k) $X = \mathbb{R}$, $xRy \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$,
l) $X = 2^{\mathbb{N}}$, $xRy \Leftrightarrow \#(x \triangle y) < +\infty$.

2. Wykaż, że jeśli relacja R w X jest spójna i symetryczna, to $R = X \times X$.

3. Podaj przykład relacji, która jest
a) zwrotna i antysymetryczna, ale nie przechodnia,
b) zwrotna i przechodnia, ale nie jest antysymetryczna,
c) przechodnia i antysymetryczna, ale nie jest zwrotna.

4. Niech zbiór $X = \{3, 5, 7, 9, \dots, 19, 21\}$ będzie uporządkowany przez relację podzielności. Znajdź elementy wyróżnione.

5. Niech
a) $X = \mathbb{N}$, $A = \{18, 21, 36\}$,
b) $X = \{2n - 1 : n \in \mathbb{N}\}$, $A = \{3, 7, 9, 21, 27\}$,
c) $X = \{2^n \cdot 3^k : n, k \in \mathbb{N}_0\}$, $A = X \cap \{20, 21, \dots, 119, 120\}$,
przy czym X jest zbiorem uporządkowanym przez relację podzielności. Wyznacz kresy zbioru A.

6. Niech
$$A = \{2^n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{5^n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{6, 7, 10\}.$$
Wyznacz elementy wyróżnione oraz kresy zbioru A jako podzbioru $\mathbb{N}$ uporządkowanego przez relację podzielności.

7. W zbiorze $\mathbb{N}^2$ relacja R jest zdefiniowana wzorem
$$(x, y)R(s, t) \Leftrightarrow x \leqslant s \wedge y | t.$$
Wyznacz elementy wyróżnione oraz kresy zbiorów
$$A = \{(2, 1), (1, 3), (1, 4), (1, 6)\}, \qquad B = \{(1, 2), (2, 1), (1, 4), (3, 2), (3, 8)\}.$$

8. Dla ustalonego $k \in \mathbb{N}$ podaj przykład zbioru uporządkowanego, w którym jest dokładnie
a) $k + 1$ elementów, z czego jeden to element minimalny, a reszta to elementy maksymalne,
b) k elementów, przy czym wszystkie są minimalne i maksymalne.

9. Uzasadnij, że w każdym uporządkowanym zbiorze skończonym istnieje co najmniej jeden element minimalny i co najmniej jeden element maksymalny.

10. Załóżmy, że w uporządkowanym zbiorze skończonym istnieje dokładnie jeden element maksymalny (minimalny). Wykaż, że jest to również element największy (najmniejszy).

11. Niech X będzie zbiorem skończonym liniowo uporządkowanym przez relację $\prec$. Udowodnij, że elementy zbioru X można ustawić w ciąg x_1, x_2, ..., x_n w ten sposób, że
$$x_1 \prec x_2 \prec \cdots \prec x_n.$$

12. Podaj przykład nieskończonego zbioru uporządkowanego, w którym jest

a) nieskończenie wiele elementów minimalnych i k maksymalnych, dla ustalonego $k \in \mathbb{N}$,

b) dokładnie jeden element minimalny, a pozostałe są maksymalne.

13. Które z następujących relacji R w zbiorze X są relacjami równoważności?

a) $X = \mathbb{Z}$, $xRy \Leftrightarrow 3 \mid x - y$.

b) $X = \mathbb{N}$, $xRy \Leftrightarrow xy$ jest liczbą nieparzystą.

c) $X = \mathbb{N}$, $xRy \Leftrightarrow \bigvee_{t \in \mathbb{N}} xy = t^2$.

d) $X = \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $(x, y)R(s, t) \Leftrightarrow x, s \neq 0 \wedge xs > 0$.

e) $X = 2^Y$ dla pewnego zbioru Y, $xRy \Leftrightarrow x \subset y \vee y \subset x$.

f) $X = \mathbb{N}_0^2 = \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$, $(m, n)R(a, b) \Leftrightarrow m + b = n + a$.

g) $X = \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, $(m, n)R(a, b) \Leftrightarrow mb = na$.

Dla relacji równoważności opisz klasy abstrakcji względem tej relacji.

14. Niech R będzie relacją zwrotną i przechodnią. Wykaż, że relacja R' zdefiniowana wzorem $xR'y \coloneqq xRy \wedge yRx$ jest relacją równoważności.