Zestaw 3 — Logika

1. Zbuduj formułę zależną od trzech zmiennych logicznych, która przyjmuje wartość 1 wtedy i tylko wtedy, gdy:

a) dokładnie jedna ze zmiennych przyjmuje wartość 1,
b) dokładnie dwie ze zmiennych przyjmują wartość 1.

2. Sprawdź, dowolną metodą, czy poniższe formuły są tautologiami:

a) $\{[(p \wedge q) \Rightarrow r] \wedge [(p \vee q) \Rightarrow \neg r]\} \Rightarrow (p \wedge q \wedge r)$,
b) $[(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow q) \wedge (s \Rightarrow q)] \Rightarrow [(p \wedge r \wedge \neg s) \Rightarrow q]$,
c) $[(p \vee q) \wedge (r \vee s)] \Rightarrow \{[(p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r)] \wedge [(q \Rightarrow s) \vee (q \Rightarrow p)]\}$,
d) $[(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s) \wedge (t \Rightarrow u)] \Rightarrow [(p \wedge r \wedge t) \Rightarrow (q \wedge s \wedge u)]$.

3. Wykaż, posługując się znanymi prawami rachunku zdań, że:

a) $(p \Rightarrow q) \equiv \neg(p \wedge \neg q)$,
b) $[(p \wedge q) \Rightarrow r] \equiv [p \Rightarrow (q \Rightarrow r)]$,
c) $[(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)] \equiv [(p \vee q) \Rightarrow r]$.

4. Znajdź najkrótszą formułę równoważną z formułą:

a) $(p \wedge q \wedge s) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge \neg s) \vee \neg[(p \wedge r) \Rightarrow q]$,
b) $(q \wedge r \wedge s \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg p) \vee (r \wedge s)$.

5. Wykorzystując funktory $\oplus$ oraz 1, zapisz formułę równoważną z $p \Leftrightarrow q$,

6. Przy pomocy funktorów $\oplus$, $\Rightarrow$, 1 i 0 (nie musisz wykorzystywać wszystkich) zapisz formuły równoważne z $p \wedge q$ i $p \vee q$.

7. Przedstaw formuły $p \oplus q$ i $p \oplus q \oplus r$ w koniunkcyjnej i dysjunkcyjnej postaci normalnej.

8. Zapisz funktory negacji, koniunkcji, alternatywy i implikacji, wykorzystując jedynie funktor NAND.

9. Opierając się na rozwiązaniu zadania 8, zbuduj przy pomocy funktora NAND oraz jednej zmiennej p formułę, która niezależnie od wartości p przyjmie wartość 1. Stwórz analogiczną formułę, która przyjmie wartość 0.

10. Wyraź

a) funktor $\Rightarrow$ przy pomocy funktorów $\vee$ i $\neg$,
b) funktor $\wedge$ przy pomocy funktorów $\Rightarrow$ i $\neg$,
c) funktor $\vee$ przy pomocy funktora $\Rightarrow$.

11. Uzasadnij, że

a) funktora $\neg$ nie można wyrazić przez funktory $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$ i $\Leftrightarrow$,
b) funktora $\Rightarrow$ nie można wyrazić przez funktory $\wedge$ i $\vee$,
c) funktora $\wedge$ nie można wyrazić przez funktory $\vee$ i $\Rightarrow$.

12. Uzasadnij, że zbiór funktorów $\{\Rightarrow, \neg\}$ jest zupełny.

13. Określ wartość logiczną zdań (zakresem zmienności wszystkich zmiennych jest $\mathbb{R}$):

a) $\bigwedge_x \bigwedge_y x^2 + y^2 > 0$,
b) $\bigwedge_x \bigvee_y x^2 + y^2 = 0$,
c) $\bigwedge_x \bigvee_y x^2 + y = 0$,
d) $\bigvee_x \bigwedge_y x^2 + y = 0$,
e) $\bigvee_a \bigwedge_x (a-3)x^2 + (a+1)x + 1 < 0$,
f) $\bigvee_a \bigvee_x x^2 - 2x + \log_{\frac{1}{2}} a = 0$,

g) $\bigvee_a \bigwedge_x a^2x^2 + ax - 4 > 0$,

h) $\bigvee_a \bigwedge_x x^2 + 4x + \left(\frac{1}{2}\right)^a > 0$.

14. Zapisz za pomocą funktorów i kwantyfikatorów następujące zdania:

a) dla dowolnych a i b, dla których $a > b$, można znaleźć taką liczbę n, że $nb > a$,
b) a jest liczbą parzystą,
c) a jest sumą trzech kwadratów liczb wymiernych,
d) nie istnieje największa liczba naturalna,
e) p jest liczbą pierwszą,
f) c jest największym wspólnym dzielnikiem liczb a i b,
g) jeżeli dwie liczby całkowite dzielą się wzajemnie jedna przez drugą, to liczby te różnią się co najwyżej znakiem,
h) liczby a i b mają takie same dzielniki,
i) układ równań $x + y = 2$, $2x + 2y = 3$ nie ma rozwiązań,
j) funkcja f ma dokładnie jedno miejsce zerowe.

W rozwiązaniu można użyć symbolu podzielności: dla liczb całkowitych piszemy $a|b$ wtedy i tylko wtedy, gdy b dzieli się bez reszty przez a.

15. Wyznacz wykresy funkcji zdaniowych (zakresem zmienności wszystkich zmiennych jest zbiór liczb rzeczywistych):

a) $\bigvee_x x^2 + y^2 = 1$,
b) $\bigwedge_x x^2 + y^2 = 1$,
c) $\bigvee_y xy = 1$,
d) $\bigwedge_y xy < 1$,
e) $\bigwedge_x x^2 + 1 < y$,
f) $\bigvee_x x^2 + y^2 = z^2$,
g) $\bigwedge_x x^2 + y^2 \neq z^2$,
h) $\bigwedge_x \bigvee_y x^2 + y^2 = z^2$,
i) $\bigvee_x \bigwedge_y xy = z$,
j) $\bigwedge_x \bigvee_y (x < z) \wedge (z < y)$,
k) $\bigwedge_x \bigwedge_y x^2 + y^2 \geqslant z$,
l) $\bigvee_x (x^2 + y^2 = 1) \vee (x < x)$.