Zestaw 2 — Indukcja matematyczna

1. Uzasadnij, że
$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

2. Udowodnij, że
$$\frac{4^n}{n+1} < \frac{(2n)!}{(n!)^2}, \qquad n \geqslant 2.$$

3. Znajdź wszystkie liczby naturalne n, dla których prawdziwa jest nierówność

a) $2^n > n^2$,

b) $3^n \geqslant 2(n+1)^2$.

4. Znajdź zwartą postać sumy
$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$
dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$.

5. Znajdź zwartą postać sumy
$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots + n \cdot n!$$
dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$.

6. Udowodnij nierówność
$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2^n - 1} > \frac{n}{2}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

7. Niech $(F_n)_{n \geqslant 1}$ będzie ciągiem Fibonacciego zdefiniowanym rekurencyjnie
$$F_0 = 0, \qquad F_1 = 1, \qquad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$
Sprawdź, że
$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right], \qquad n \geqslant 0.$$

8. Udowodnij, że
$$F_{m+n} = F_{m+1}F_n + F_m F_{n-1}, \qquad m, n \in \mathbb{N}.$$

9. Sprawdź, że
$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

10. Uzasadnij, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ liczba F_{5n} jest podzielna przez 5.

11. Zdefiniujmy ciąg $(a_n)_{n \geqslant 0}$ wzorami $a_0 = 1$, $a_1 = 3$, $a_2 = 5$,
$$a_{n+2} = 3a_n + 2a_{n-1}, \qquad n \geqslant 1.$$
Znajdź wzór rekurencyjny na a_n, $n \in \mathbb{N}$, w którym nie występuje żaden wyraz ciągu poza a_{n-1}.

12. Ciąg $(a_n)_{n \geqslant 0}$ jest zdefiniowany rekurencyjnie przez równości
$$a_1 = 1, \qquad a_{m+n} + a_{m-n} = \frac{1}{2}(a_{2m} + a_{2n}), \quad m \geqslant n \geqslant 0.$$
Znajdź wzór jawny na a_n dla $n \geqslant 0$.

13. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b oraz dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą równości
$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{i=0}^{n-1} a^{n-1-i}b^i, \qquad (a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^k b^{n-i}.$$

14. W pewnym państwie każda para miast jest połączona drogą jednokierunkową. Uzasadnij, że istnieje w tym państwie takie miasto, do którego można dojechać z każdego innego miasta bezpośrednio lub przejeżdżając przez co najwyżej jedno inne miasto.

15. Z szachownicy o wymiarach $2^n \times 2^n$ usunięto jedno pole (wymiaru 1×1). Wykaż, że pozostałą część można pokryć figurami w kształcie litery L, które złożone są z trzech pól 1×1.

16. Nieparzysta liczba dzieci ustawiła się na zaśnieżonym boisku szkolnym. Każde dziecko stoi w innym miejscu, a odległości między dziećmi są parami różne. W pewnym momencie każde dziecko rzuca kulką śniegu w dziecko stojące najbliżej. Wykaż, że przynajmniej jedno z dzieci nie zostanie trafione.

17. Uzasadnij, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ i dowolnego zbioru A o n elementach, wszystkie jego podzbiory A_i, $i = 1, \ldots, 2^n$ można ustawić w kolejności

$$A_1, \quad A_2, \quad A_3, \quad \ldots, \quad A_{2^n}$$

w ten sposób, że każde dwa sąsiednie zbiory różnią się dokładnie jednym elementem, przy czym zbiory A_1 i A_{2^n} również uznajemy za sąsiednie.

Dla $n = 3$ i zbioru $\{1, 2, 3\}$ kolejność podzbiorów może być następująca:

$$\emptyset, \quad \{1\}, \quad \{1,2\}, \quad \{2\}, \quad \{2,3\}, \quad \{1,2,3\}, \quad \{1,3\}, \quad \{3\}.$$

18. Bolek i Lolek grają w następującą grę. Na stole leżą dwa niepuste stosy cukierków. Zaczyna Bolek, którego ruch polega na zjedzeniu wszystkich cukierków z wybranego stosu i podzieleniu drugiego stosu na dwie (niekoniecznie równe, ale niepuste) części. Następnie Lolek robi to samo, zjada wybrany stos i dzieli drugi na dwie części. Gracze postępują w ten sposób, aż jeden z nich nie będzie mógł wykonać legalnego ruchu. Który z graczy ma strategię wygrywającą?