Zestaw 1 — Teoria mnogości

1. Udowodnij, że dla dowolnych zbiorów A, B, C i D zachodzą równości:
a) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$,
b) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$,
c) $(A \setminus B) \cup C = [(A \cup C) \setminus B] \cup (B \cap C)$,
d) $(A \setminus B) \cap (C \setminus D) = (A \cap C) \setminus (B \cup D)$.

2. Wykaż, że dla dowolnych zbiorów A, B, C i D zachodzą warunki:
a) jeśli ($A \subset B$ i $C \subset D$), to ($A \cup C \subset B \cup D$),
b) jeśli $A \subset B$ oraz $C \subset D$, to $A \setminus D \subset B \setminus C$.

3. Udowodnij, że dla dowolnych zbiorów A, B i C zachodzą równości:
a) $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$,
b) $A \setminus B = A \triangle (A \cap B)$,
c) $A \triangle B = A^c \triangle B^c$.

4. Wykorzystując znane prawa rachunku zbiorów, pokaż, że

$$(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C).$$

5. Uzasadnij, że dla dowolnych zbiorów A i B istnieje dokładnie jeden zbiór C, dla którego

$$A \triangle C = B.$$

6. Pokaż, że dla dowolnych zbiorów A, B i C jeżeli zbiory $A \triangle B$ i $B \triangle C$ są skończone, to skończony jest również zbiór $A \triangle C$.

7. Znajdź warunek równoważny równości

$$\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$$

wyrażony w terminach własności zbiorów A i B.

8. Uzasadnij, że dla dowolnych zbiorów A i B mamy
a) $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$,
b) $\mathcal{P}(A \cup B) = \{C \colon C = A_1 \cup B_1 \text{ dla pewnych } A_1 \in \mathcal{P}(A) \text{ i } B_1 \in \mathcal{P}(B)\}$.

9. Udowodnij, że dla dowolnych zbiorów A, B, C i D mamy
a) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$,
b) $(A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (A \times D) \cup (B \times C) \cup (B \times D)$,
c) $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$.