Kresy zbiorów

$(X, \prec)$

rel. porządku

$A \subset X$ $\qquad (A, \prec)$

rel. obcięta do zb. A

Def. Ograniczeniem górnym zb. A nazywamy dowolny $x \in X$, dla którego

$$\bigwedge_{a \in A} a \prec x .$$

Ogr. dolnym ... : $x \in X$:

$$\bigwedge_{a \in A} x \prec a .$$

Def. Kresem górnym zb. A nazywamy najmniejsze (o ile istnieje) ograniczenie górne zb. A.

Kresem dolnym zb. A nazywamy największe (o ile istnieje) ograniczenie dolne zb. A.

w sensie rel. porządku

$X = \mathbb{R}$, $\geq$, $A = [0,1)$

A: el. minimalne : brak

el. maksymalne : 0

el. największy : brak

el. najmniejszy : 0 $\leftarrow$ $\bigwedge_{a \in [0,1)} a \geq 0$

$(X, \leq)$, A: el. minimalne : 0

el. maksymalne : brak

el. najmniejszy : 0

el. największy : brak

$(X, \geq)$, $A = [0,1)$,

zb. ograniczeń górnych zb. $A = \underline{(-\infty, 0]}$

$x \in X : \bigwedge_{a \in [0,1)} a \geq x$

kres górny zb. $A = 0$

sup A

supremum

zb. ogr. dolnych zb. $A = [1, +\infty)$

kres dolny zb. $A = 1$

$\bigwedge_{a \in A} a \geq x$

$\bigwedge_{a \in A} x \geq a$

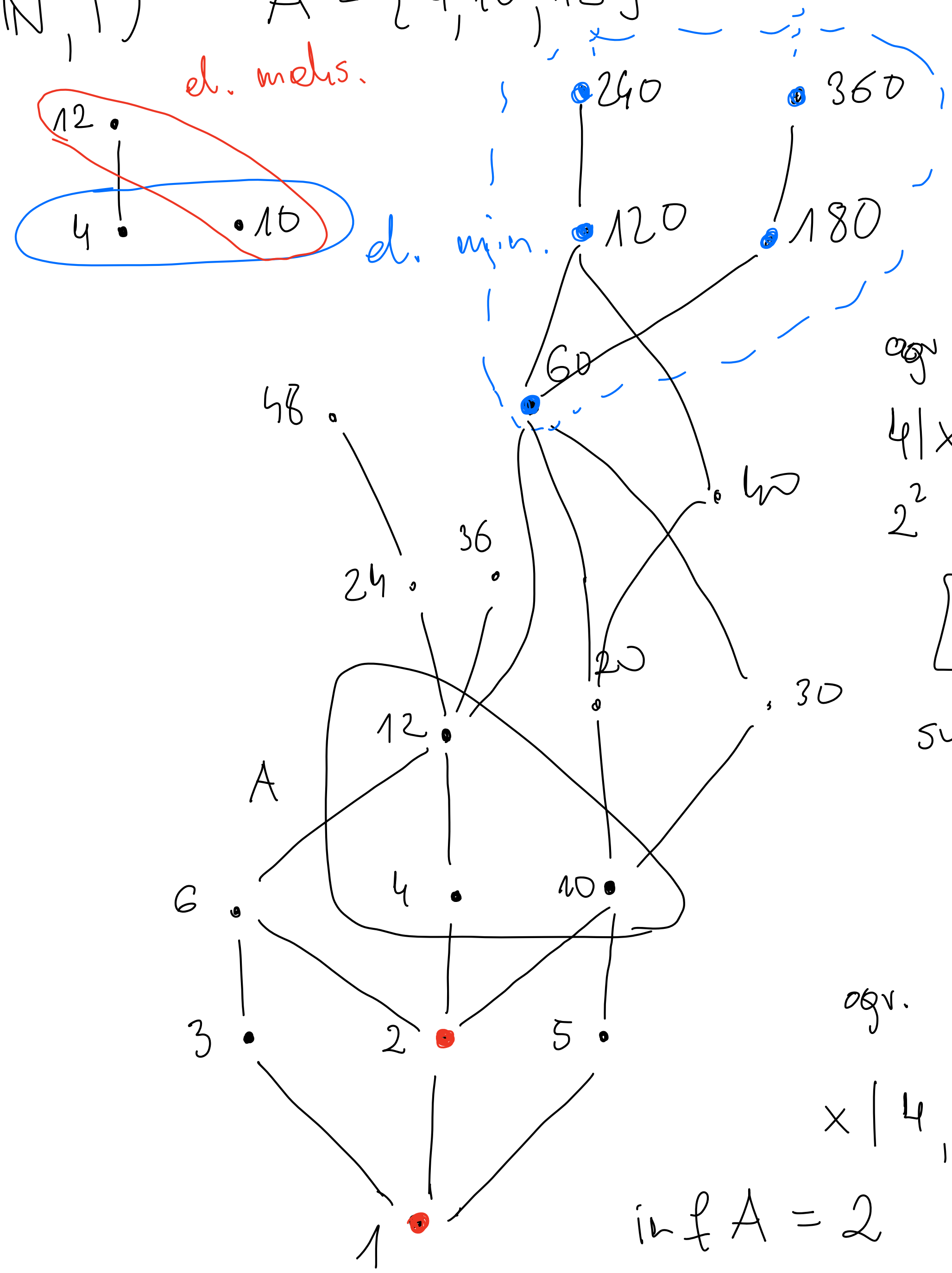
$\inf A = 1$
infimum

$(X, \leq)$, $A = [0,1)$

$\sup A = 1$

$\inf A = 0$

2) $(\mathbb{N}, |)$ $A = \{4, 10, 12\}$



ogr. górne x

$4|x$, $10|x$, $12|x$

2^2 $\quad 2\cdot 5$ $\quad 2^2\cdot 3$

$$\boxed{2^2\cdot 3\cdot 5 = 60}$$

$\sup A = 60$

ogr. doln. x

$x|4$, $x|10$, $x|12$

$\inf A = 2$

Relacje równoważności

- zwrotne $\quad xRx$
- symetryczne $\leftarrow$ $xRy \Rightarrow yRx$
- przechodnia $\quad xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$

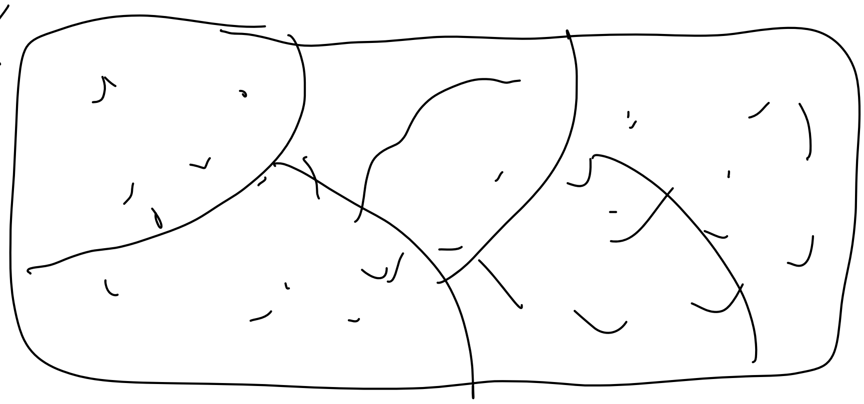
rel. porządku

$\leqslant \rightsquigarrow \preccurlyeq$

rel. równ.

$= \rightsquigarrow \sim$

X



Relacja przystawania (kongruencji)

$(\mathbb{Z}, \sim)$, $\boxed{n \in \mathbb{N}}$ $\leftarrow$ ustalone

$a, b \in \mathbb{Z}$ $\quad a \sim b \iff n \mid a-b$

$\checkmark$ • zw.? $\quad \bigwedge_{a \in \mathbb{Z}} a \sim a \iff \bigwedge_{a \in \mathbb{Z}} n \mid a-a$

$\Downarrow$

$n \mid 0$ T

$\checkmark$ • sym.? $\quad \bigwedge_{a,b \in \mathbb{Z}} a \sim b \Rightarrow b \sim a$

$\Downarrow$ $\quad\quad n \mid b-a$

$n \mid a-b$ $\quad\quad \Uparrow$

$\Downarrow$ $\quad\quad b-a = (-k)n$

$\bigvee_{k \in \mathbb{Z}} a-b = kn \rightarrow$

V • przech. $\bigwedge_{a,b,c\in\mathbb{Z}} a\sim b \wedge b\sim c \Rightarrow a\sim c$

$a-b=kn \qquad b-c=ln$

$$a-c=(a-b)+(b-c)=$$
$$=kn+ln=\underbrace{(k+l)}n$$

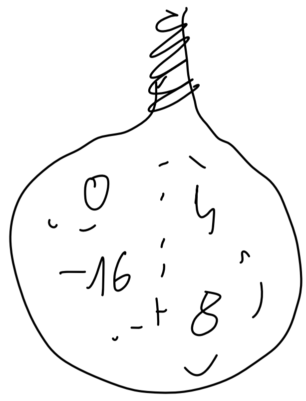
$\cancel{a\sim b}$

$$\boxed{a\equiv b \pmod{n}} \iff n\,|\,a-b$$

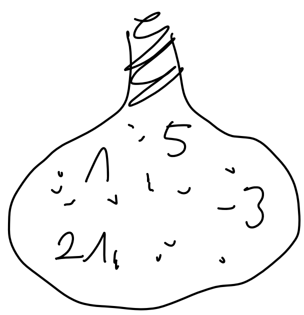
1) $\dfrac{n=4}{a\equiv b \pmod{4}}$ $\Big\}$ $4\,|\,a-b \iff \bigvee_{k\in\mathbb{Z}} a-b=4k$

$0\sim 4 \qquad 0\sim -16 \qquad 0\sim 8 \qquad \ldots$

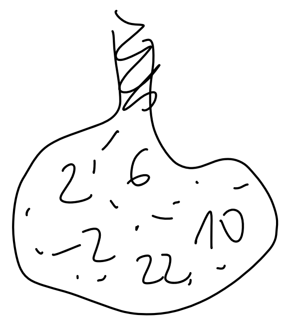
$1\sim 5 \qquad 1\sim -3 \qquad 1\sim 21 \qquad \ldots$



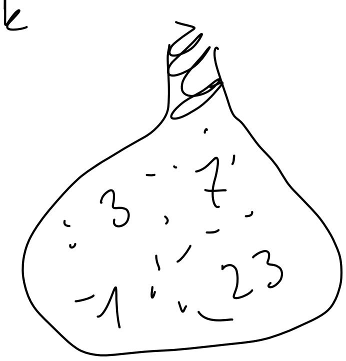
4k



4k+1



4k+2



4k+3

$\mathbb{Z}$

$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$
0	1	2	3

Zasada abstrakcji

$(X, \sim) \qquad x \in X$

$\underbrace{[x]}_{\text{klasa abstrakcji}} \overset{\text{def.}}{=} \{ y \in X : x \sim y \}$

: X jest sumą rozłącznych klas abstrakcji.

$\Rightarrow$

1) Każdy el. $x \in X$ należy do pewnej klasy abs. $\{ x \in [x] \}$

2) $\bigwedge_{x,y \in X} [x] = [y] \vee [x] \cap [y] = \emptyset$

$\mathbb{Z}$, $\quad a \sim b \iff 4 \mid a-b$

$$\begin{cases} [0] = \{4k : k \in \mathbb{Z}\} = [4] = [-12] = [100] = \ldots \\ [1] = \{4k+1 : k \in \mathbb{Z}\} = [5] = [-3] = \ldots \\ [2] = \{4k+2 : k \in \mathbb{Z}\} \ \ldots \\ [3] = \{4k+3 : k \in \mathbb{Z}\} \ \ldots \end{cases}$$

Teoria liczb

$$a \mid b \iff \bigvee_{k \in \mathbb{Z}} b = ka \quad , \quad a, b \in \mathbb{Z}$$

$19 : 5$

$$19 = \underline{3 \cdot 5 + 4} = \cancel{\underline{1 \cdot 5 + 14}}$$

$$0 \leq \quad < 5$$

<u>Tw.</u> (o dzieleniu z resztą) Jeżeli $m \in \mathbb{Z}$ i $n \in \mathbb{N}$, to istnieje dokładnie jedna para liczb $q, r \in \mathbb{Z}$, dla której

$$m = \underbrace{q}_{\text{iloraz}} \cdot n + \overbrace{r}^{\text{reszta}}$$

oraz

$$0 \leq r < n.$$

Dowód.

$\cancel{\frac{19}{5} = \overset{q}{3}\overset{r}{\frac{4}{5}}}$

1) Istnienie   2) Jedyność

Chcemy

$m = qn + r,\ 0 \le r < n.$

Niech

$A = \{ m - kn : k \in \mathbb{Z}, \underbrace{m - kn \ge 0} \}$

A jest niepusty:

I $m \ge 0$: dla $k = 0$ mamy $m - 0 \cdot n \ge 0$

$m \in A$

II $m < 0$: dla $k = m$ mamy $\overbrace{m - mn}^{m-kn} = -\underbrace{m}_{>0}\underbrace{(n-1)}_{\ge 0} \ge 0$

$m - mn \in A$

W A są tylko elementy nieujemne (i całkowite).
W związku z tym, w A istnieje el. najmniejszy, r

$r = m - qn.$ $\quad q \in \mathbb{Z}.$ $\quad \{ m = qn + r \}$

Sprawdzimy, że $\underbrace{0 \le r}_{\substack{\uparrow \\ \text{oczywiste}}},\ \underline{< n}.$

$\boxed{\text{Załóżmy, że } r \ge n.}$

$r = m - qn \ge n \quad | - n$

$m - qn - n \ge 0$

$$r' = m - (q+1)n \geq 0$$

$$\left.\begin{array}{l} r' = m - kn \geq 0 \implies r' \in A \\ \\ r' = r - n \implies r' < r \end{array}\right\} \text{sprzeczność z wyborem } r$$

Ostatecznie $r < n$.