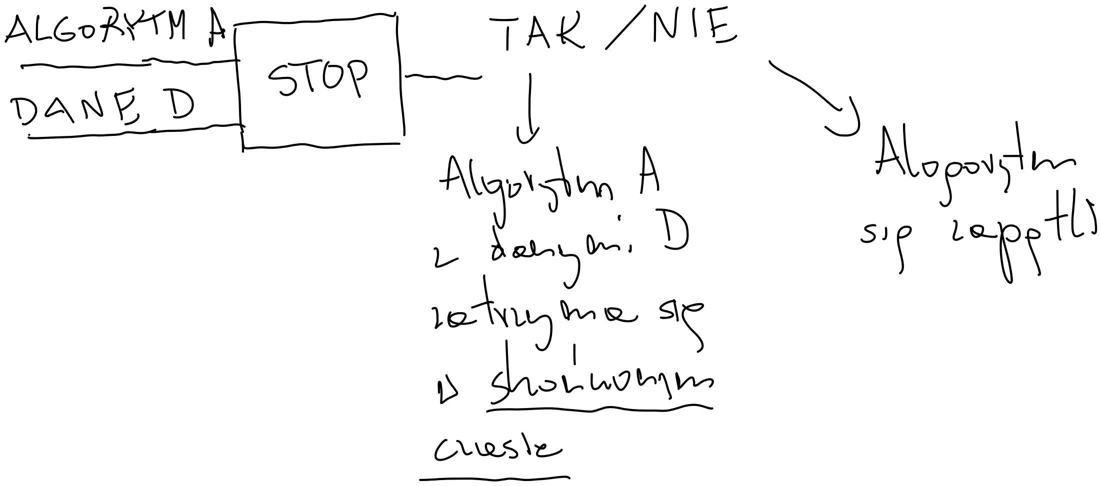
$$A = \{ B : B \notin B \} \qquad \boxed{A \in A ?}$$

Problem STOPU



Załóżmy, że

$\mathrm{STOP}(A, D) \longrightarrow$ TAK / NIE TRUE / FALSE

istnieje.

```
T(X):
    if STOP(X, X):
        while TRUE
```

Czy T(T) zatrzyma się w skończonym czasie?

TAK $\Rightarrow$ STOP(T,T) jest fałszem $\Rightarrow$ T(T) zapętla się. sprzeczność.

NIE $\Rightarrow$ STOP(T,T) jest prawdą $\Rightarrow$ T(T) zatrzymuje się sprzeczność.

Wniosek: STOP nie istnieje!

Alan Turing (1936 r.)

Relacje

Studenci , Przedmioty

(student, przedmiot)

⋮

} relacja

$\boxed{(128, 13)}$

Użytkownicy , Zasoby

(użytkownik, zasób)

⋮

} relacja

Miasta , Miasta

(miasto 1, miasto 2)

⋮

} relacja

X, Y - zbiory

$R \subset X \times Y$

$\uparrow$ relacja

$x \in X, \ y \in Y$

$\boxed{(x,y) \in R}$ $\leftarrow$ x jest w relacji z y

$\rightsquigarrow$ xRy

$X = \mathbb{R} \quad Y = \mathbb{R}$

$\leq \ = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} :$ x jest mniejsze lub równe $y\}$

$\boxed{(2,3) \in \ \leq}$ $\rightsquigarrow$ $2 \leq 3$

Własności relacji

$X = Y$, $\quad R \subset X \times X$

- ZWROTNOŚĆ

$$\bigwedge_{x} xRx \qquad \{(x,x) \in R \qquad \{ \leq \text{ jest zwrotne}$$

- SYMETRYCZNOŚĆ

$$\bigwedge_{x,y} xRy \Rightarrow yRx$$

- ANTYSYMETRYCZNOŚĆ

$$\bigwedge_{x,y} (xRy \wedge yRx) \Rightarrow x = y$$

- PRZECHODNIOŚĆ

$$\bigwedge_{x,y,z} (xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz$$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "R"] \arrow[rr, bend right, "R"'] & y \arrow[r, "R"] & z \end{tikzcd}$$

- SPÓJNOŚĆ

$$\bigwedge_{x,y} xRy \vee yRx$$

1) $X = \mathbb{R}$

$R = \leq \quad \leftarrow$

$x \leq x$

$x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$

$x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$

$x \leq y \vee y \leq x$

Jest zwrotna, antysym., przechodnia i spójna.

2) $X = \mathbb{R}$, $R = \text{"="}$ $R = \{(x,x) : x \in \mathbb{R}\}$

---

3) $X = \mathbb{N}$, $R = |$

$a, b \in \mathbb{N}$ $a | b$ ← a dzieli b

b jest podzielne przez a

$$\boxed{a | b \iff \bigvee_{k \in \mathbb{Z}} b = ka}$$

| • $a | a$

• $a | b \overset{?}{\Rightarrow} b | a$ $2 | 4$ $\neg(4 | 2)$

• $a | b \wedge b | a \overset{?}{\Rightarrow} a = b$

$\bigvee_k b = ka$ $\bigvee_m a = mb$ $b = a$ $a = b$

$b = ka = kmb$

$\underset{\substack{\neq \\ 0}}{b}\underbrace{(1 - km)}_{\substack{\shortparallel \\ 0}} = 0$

$1 - km = 0$

$km = 1$

$k = m = 1$

• $a | b \wedge b | c \overset{?}{\Rightarrow} a | c$

$\bigvee_k b = ka$ $\bigvee_m c = mb \Rightarrow c = mb = m(ka) = \boxed{(mk)} a$

- $a|b \vee b|a$

$\cancel{2|3}$ $\cancel{3|2}$

$|$ jest $\underbrace{\text{zwrotna, antysym., przechodnia}}$

Relacje porządku

X, $R \subset X \times X$

R jest relacją (częściowego) porządku, jeżeli jest:

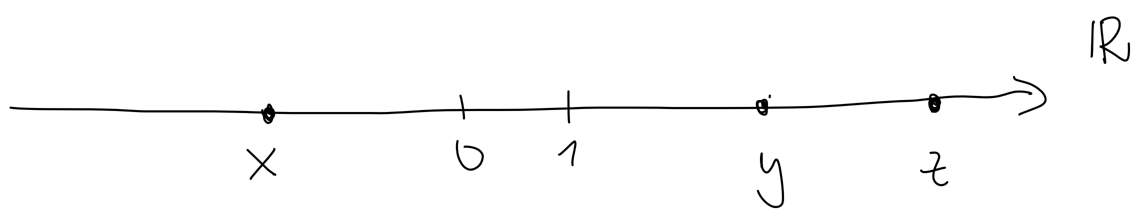
- zwrotna,
- antysymetryczna,
- przechodnia.

$(\mathbb{R}, \leq)$

$(\mathbb{N}, |)$

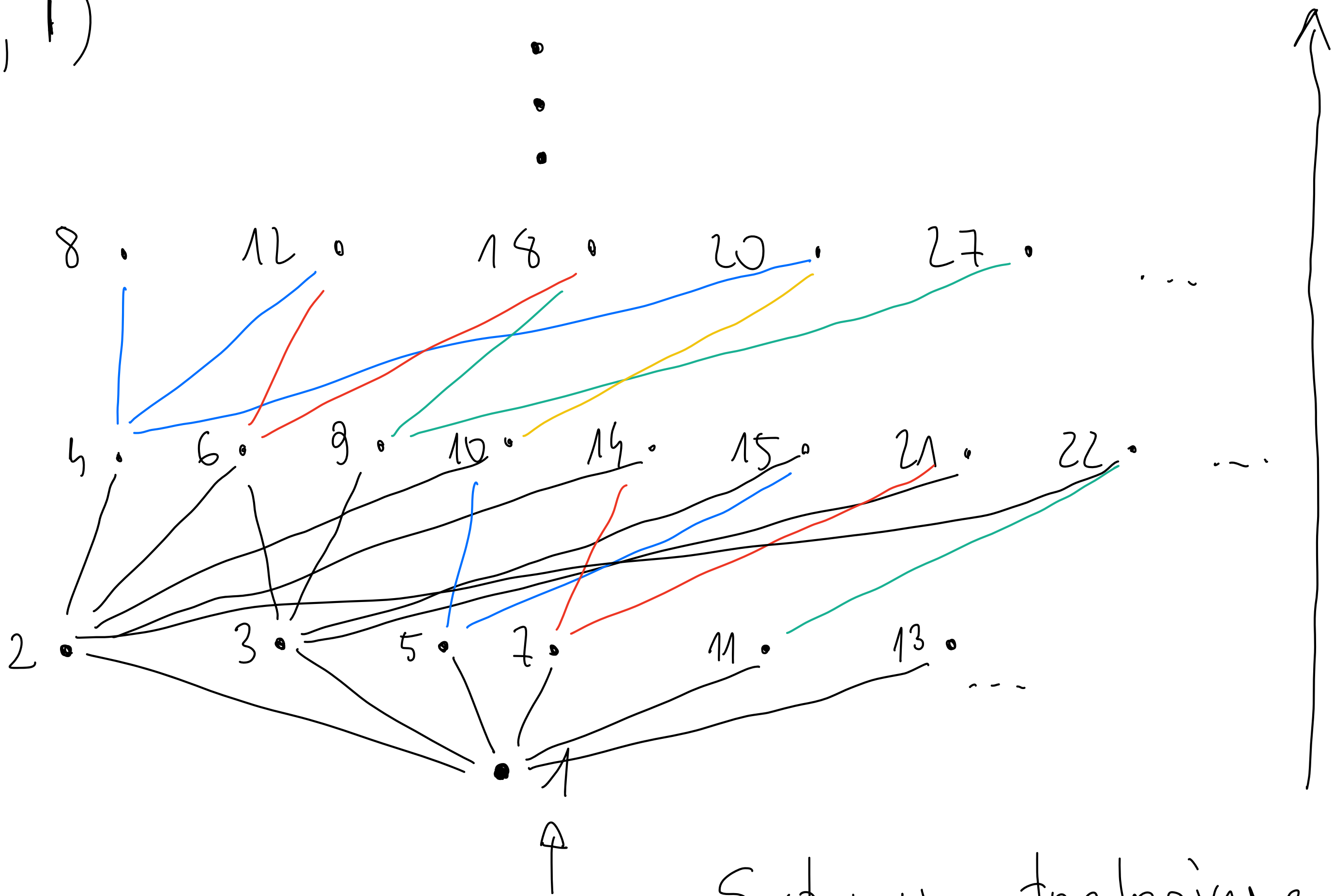
Jeżeli R jest rel. częściowego porządku i jest dodatkowo <u>spójna</u>, to R nazywamy relacją porządku liniowego (lub całkowitego).

$(\mathbb{R}, \leq) \leftarrow$ porządek liniowy



$x \leq y$

$(\mathbb{N}, |)$

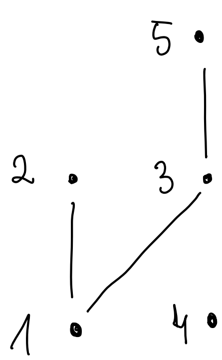


Sortowanie topologiczne

sort(lista, key= ...)

$X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5),$
$(1,2), (1,3), (1,5), (3,5)\}$



Element wyróżnione $\leqslant$

$X, \prec$ - rel. porządku $\quad xRy \rightsquigarrow x \prec y$

- el. minimalne

  $x \in X: \quad \bigwedge_{y \in X} y \prec x \Rightarrow y = x$

- el. maksymalne

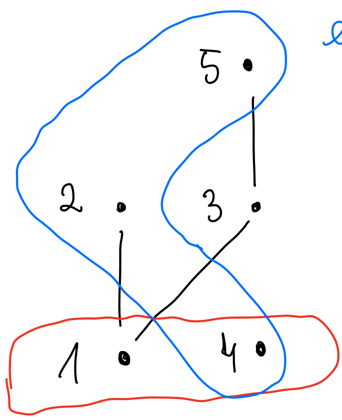
  $x \in X: \quad \bigwedge_{y \in X} x \prec y \Rightarrow y = x$

- el. najmniejszy

  $x \in X: \quad \bigwedge_{y \in X} x \prec y$

- el. największy

  $x \in X: \quad \bigwedge_{y \in X} y \prec x$



el. maksymalne

el. minimalne

Brak el. najm. i najw.