Zmienne: $p, q, r, \dots, p_1, p_2, p_3, \dots$

Funktory: $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \oplus, |, \downarrow, \dots$

Formuły: $\neg(p \Rightarrow r) \oplus (q \vee p)$

Def: 1) Pojedyncza zmienna jest formułą. p

2) Jeżeli φ i ψ są formułami, to $(\varphi \circ \psi)$ jest formułą dla dowolnego funktora 2-arg. $\circ$.

3) Jeżeli φ jest formułą, to $\neg\varphi$ też jest form.

4) Nic innego nie jest formułą.

$\cancel{p \Rightarrow q, r}$

Tautologia: Formuła φ jest <u>tautologią</u> jeżeli dla dowolnego wartościowania zmiennych przyjmuje wartość prawda (1).

$p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$

p	q	$q \Rightarrow p$	$p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$
1	1	1	1
1	0	1	1
0	1	0	1
0	0	1	1

n zmiennych $\Rightarrow$ 2^n wierszy

$p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$

Załóżmy, że $\Rightarrow$ jest fałszem.

To znaczy, że

1   0

spr.

$q = 1, p = 0$

Implikacja $\Rightarrow$ jest prawdz.

Prawa rachunku zdań:

1) $\wedge, \vee, \Leftrightarrow, \oplus, |, \downarrow$ są przemienne $\{ p \wedge q \equiv q \wedge p$

2) $\wedge, \vee, \oplus$ są łączne $\{ (p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$

3) $\wedge$ jest rozdzielny względem $\vee$ $\{ p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

$\vee$ —— $\|$ —— $\wedge$

4) Prawa de Morgana

$$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$

$$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$$

Ćw. Sprawdzić przy pomocy tabelki.

Def. Formuły φ i ψ są równoważne, jeżeli dla dowolnego wartościowania zmiennych przyjmują tę samą wartość logiczną. Piszemy wtedy

$$\varphi \equiv \psi.$$

$\equiv$ ← równ. formuł

$\Leftrightarrow$ ← funk. równ.

$$p \downarrow [(q \oplus r) \Rightarrow \neg(s \vee p)]$$

Postacie normalne

CNF — conjunctive normal form — koniunkcyjna postać normalna

DNF — disjunctive — dysjunkcyjna p.n.

CNF:

$$(\;\vee \dots \vee\;) \wedge (\underbrace{\_\_}_{p / \neg p}\vee \dots \vee\;) \wedge \dots \wedge (\;\vee \dots \vee\;)$$

klauzula

$p / \neg p$ } literál

DNF:

$$(\;\wedge \dots \wedge\;) \vee (\underbrace{\_\_}_{p / \neg p}\wedge \dots \wedge\;) \vee \dots \vee (\;\wedge \dots \wedge\;)$$

klauzula

$p / \neg p$ } literál

<u>Tu.</u> Dla każdej formuły istnieją formuły φ (CNF) i ψ (DNF) równoważne z formułą wyjściową.

$(p \oplus q) \downarrow r \rightsquigarrow$ CNF DNF

$\oplus$ XOR $\neg(p \Leftrightarrow q)$

$\downarrow$ NOR $\neg(p \vee q)$

p	q	r	$(p \oplus q) \downarrow r$			
1	1	1	0	$\leftarrow$	$\neg p \vee \neg q \vee \neg r$	(111)
1	1	0	1	$\leftarrow$	$p \wedge q \wedge \neg r$	(110)
1	0	1	0	$\leftarrow$	$\neg p \vee q \vee \neg r$	(101)
0	1	1	0	$\leftarrow$	$p \vee \neg q \vee \neg r$	
1	0	0	0	$\leftarrow$	$\neg p \vee q \vee r$	
0	1	0	0	$\leftarrow$	$p \vee \neg q \vee r$	
0	0	1	0	$\leftarrow$	$p \vee q \vee \neg r$	
0	0	0	1	$\leftarrow$	$\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r$	(000)

DNF: $(p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$

CNF: $(\quad) \wedge (\quad) \wedge \ldots (\quad)$

<u>Def.</u> Zbiór funktorów A jest <u>zupełny</u> jeżeli każdą formułę da się zapisać w sposób równoważny przy pomocy wyłącznie funktorów ze zbioru A.

<u>Wniosek.</u> $\{\wedge, \vee, \neg\}$ jest zupełny.

<u>Fakt.</u> $\{\wedge, \neg\}$ i $\{\vee, \neg\}$ są zupełne.

<u>Dow.</u> Wystarczy zapisać $\vee$ przy pomocy $\wedge, \neg$.

$$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q \quad | \neg()$$

$$p \vee q \equiv \neg(\neg p \wedge \neg q)$$

<u>Fakt.</u> $\{|\}$ i $\{\downarrow\}$ są zupełne.

<u>Dow.</u> $\{\wedge, \neg\}$ jest zupełny.

$$\boxed{\{|\}: \quad p \,|\, q \equiv \neg(p \wedge q)}$$

NAND

$$\neg p \equiv \neg(p \wedge p) \equiv p \,|\, p$$

$$\neg(p \wedge q) \equiv p \,|\, q$$

$$p \wedge q \equiv \neg(\neg(p \wedge q)) \equiv \neg(p \,|\, q) \equiv$$

$$\equiv (p \,|\, q) \,|\, (p \,|\, q)$$

φ - formuła

Czy istnieje wartościowanie, przy którym φ ma wartość 1 ?

φ - DNF $\quad (\wedge \wedge) \vee \underbrace{(\wedge \wedge)}_{\text{ma 1 dla pewnego wart.}} \vee \dots \vee (\wedge \wedge)$

$\cancel{p \wedge \dots \wedge \neg p \wedge \dots}$

Problem SAT.

$$P = NP \ ?$$

$$A = \underbrace{[3, 105, -1000, \dots]}_{n \text{ (istnieje pewna liczb)}}$$

Czy w tej tablicy istnieją liczby, których suma jest równa 2025?

2^n podzbiorów

$$\boxed{P = NP \ ?}$$