ZASADA INDUKCJI ZUPEŁNEJ

Jeżeli:

1) $p(1)$ jest prawdą,

2) dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$: Z

[jeżeli $p(k)$ jest prawdą dla dowolnego $k \in \{1, 2, \dots, n\}$,

T to $p(n+1)$ jest prawdą,]

to dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ zdanie $p(n)$ jest prawdą.

---

1) $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots, \quad n \in \mathbb{N}$

$a_1 = 3, \quad a_2 = 5$ $\quad n \geq 1 \quad$ a_1, a_2

$$\boxed{a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n} \rightsquigarrow \quad a_n = \overset{n}{\dots}$$

$a_3 = 3 \cdot a_2 - 2 \cdot a_1 = 15 - 6 = 9$

$a_{100} = ?$

$a_1 = 3 \quad a_2 = 5 \quad a_3 = 9 \quad a_4 = 17 \quad a_5 = 33$

$a_4 = 3 \cdot 9 - 2 \cdot 5 = 17$

$a_5 = 3 \cdot 17 - 2 \cdot 9 = 33$

$$\boxed{a_n = 2^n + 1, \qquad n \geq 1} \qquad ?$$

1) $a_1 = 3$, $\quad a_1 = 2^1 + 1 = 3$ ✓

$a_2 = 5$, $\quad a_2 = 2^2 + 1 = 5$ ✓

2) Niech $n \geq 2$. Załóżmy, że

$$a_k = 2^k + 1. \quad k \in \{1, 2, \dots, n\} \qquad (Z)$$

(T) Chcemy pokazać, że

$$a_{n+1} = 2^{n+1} + 1.$$

$$a_{n+1} = 3 \cdot a_n - 2a_{n-1} = , \quad n \geq 2$$

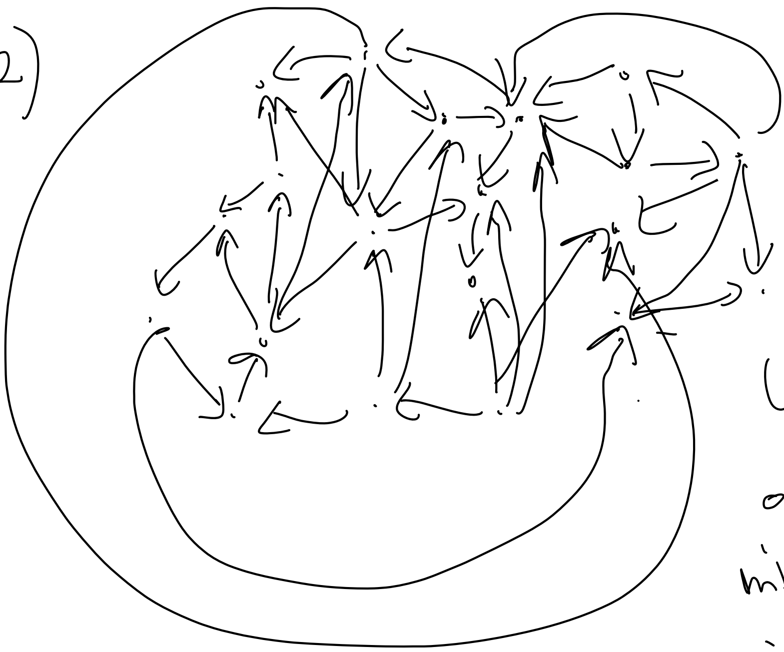
$$= 3 \cdot (2^n + 1) - 2 \cdot (2^{n-1} + 1) =$$

$$= 3 \cdot 2^n + 3 - 2^n - 2 = 2 \cdot 2^n + 1 =$$

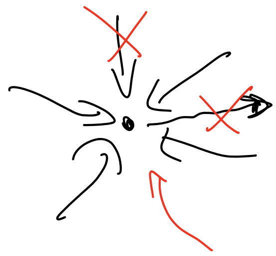
$$= \boxed{2^{n+1} + 1} \; ✓$$

---

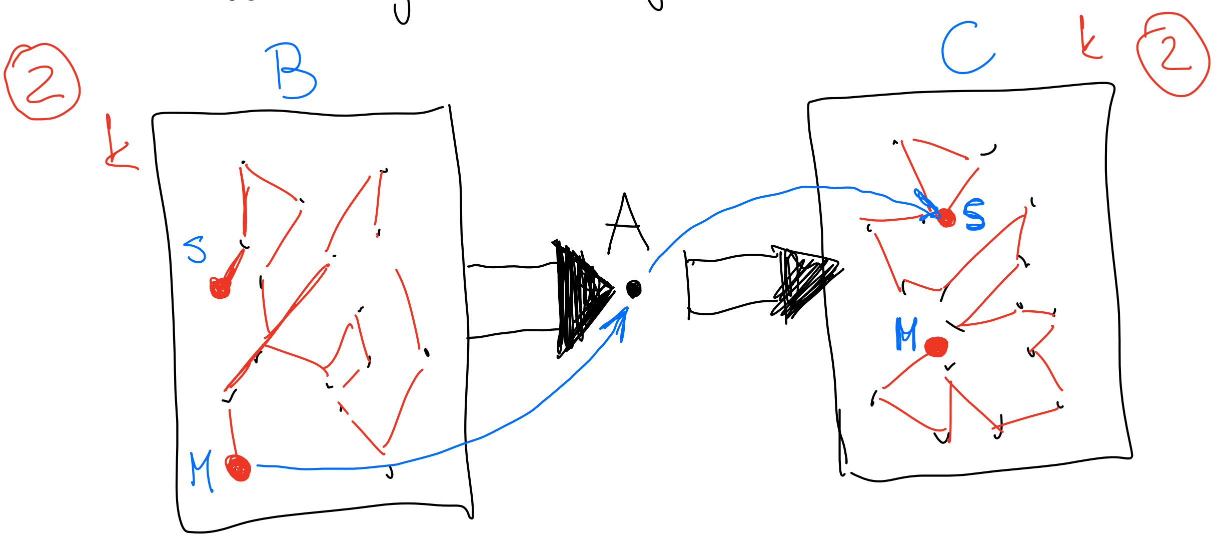
2)



Każda para miast jest połączona jedną drogą jednokierunkową. Uzasadnij, że można odbyć podróż przez wszystkie miasta, tak aby każde miasto odwiedzić dokładnie raz.



1) Dla jednego miasta jest to oczywiste.
2) Niech $n \in \mathbb{N}$. Załóżmy, że dla dowolnych k miast, gdzie $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ taka droga istnieje. Pokażemy, że wtedy taka droga istnieje dla $n+1$ miast.



$$d_B \longrightarrow A \longrightarrow d_C$$

3) Uzasadnij, że każdą liczbę $n \geq 0$ da się przedstawić w postaci dwójkowej.

$$n = (b_k b_{k-1} \dots b_1 b_0)_2 =$$
$$= b_k \cdot 2^k + b_{k-1} \cdot 2^{k-1} + \dots + b_1 \cdot 2^1 + b_0 \cdot 2^0$$
$$b_i \in \{0,1\} \quad i \in \{0,1,\dots,k\}$$

1) $n = 0$? $\quad n = (0)_2 = 0 \cdot 2^0$

2) Niech $n \geq 0$. Załóżmy, że każda liczba $\boxed{k \in \{0,1,\dots,n\}}$ ma postać dwójkową. (Z)

(T) Liczba $n+1$ ma postać — " — .

I n jest parzyste

$$n = (b_m b_{m-1} \dots b_1 0)_2$$

Wtedy

$$n+1 = (b_m b_{m-1} \dots b_1 0)_2 + (1)_2 =$$
$$= \underbrace{b_m 2^m + b_{m-1} 2^{m-1} + \dots + b_1 \cdot 2}_{n} + 1 \cdot 2^0 =$$
$$= (b_m b_{m-1} \dots b_1 1)_2 .$$

II n jest nieparzyste

n+1 jest parzysta

Istnieje takie $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, że

$$n+1 = 2k.$$

2

$$k = (b_m b_{m-1} \dots b_1 b_0)_2$$

Wtedy $n+1 = 2 \cdot k = 2 \cdot (b_m b_{m-1} \dots b_1 b_0)_2 =$

$$= 2\left(b_m 2^m + b_{m-1} 2^{m-1} + \dots + b_1 2 + b_0\right) =$$

$$= b_m 2^{m+1} + b_{m-1} 2^m + \dots + b_1 2^2 + b_0 2^1 + 0 \cdot 2^0$$

$$= (b_m b_{m-1} \dots b_1 b_0 0)_2 .$$

---

4) Dowodzenie poprawności algorytmów

```
while Q do
   S      ← instrukcje
```

NIEZMIENNIK PĘTLI
Warunek P nazwiemy niezmiennikiem pętli, jeżeli:
jeżeli P jest prawdą przed wykonaniem S, to będzie też prawdą po wykonaniu S.

Tw. o niezmiennikach (Floyd)
Jeżeli
1) pętla
```
while Q do
   S
```
kończy się po skończenie wielu krokach,
2) P jest niezmiennikiem tej pętli,
3) P jest prawdą przed pierwszym wejściem do pętli

to po zakończeniu pętli:
Q jest fałszem, P jest prawdą.

IN: $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$
OUT: x^n

$k = 0$
$y = 1$

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n}$$

$n-1$ mn.

$k \leftarrow 0$
$y \leftarrow 1$
while $k < n$
  $y \leftarrow y \cdot x$
return y

$$3^{21} = 3 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 3 \leftarrow 20 \text{ mn.}$$

$$21 = 16 + 4 + 1 = (10101)_2$$

$$3^{21} = 3^{16+4+1} = 3^{16} \cdot 3^4 \cdot 3^1 \leftarrow 2 \text{ mn.}$$

$$3^1 \xrightarrow{()^2} 3^2 \xrightarrow{()^2} 3^4 \xrightarrow{()^2} 3^8 \xrightarrow{()^2} 3^{16}$$

4 mn.

6 mn.

$$x^n = x^{(b_k b_{k-1} \ldots b_1 b_0)_2} =$$

$$= x^{b_k 2^k} \cdot x^{b_{k-1} 2^{k-1}} \cdot \ldots \cdot x^{b_1 2} \cdot x^{b_0} =$$

$$= \left(x^{2^k}\right)^{b_k} \cdot \left(x^{2^{k-1}}\right)^{b_{k-1}} \cdot \ldots \cdot \left(x^{2^1}\right)^{b_1} \cdot \left(x^{2^0}\right)^{b_0}$$

$$\underbrace{x \to x^2 \to x^4 \to x^8 \to \dots \to x^{2^{k-1}} \to x^{2^k}}$$

1 mn.

IN: $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$

OUT: x^n

```
y ← x
m ← n
z ← 1
while m > 0
    if m jest nieparzyste
        z ← z · y
    y ← y · y
    m ← m // 2
return z
```

m % 2

m & 1

m >> 1
