• $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

Udowodnimy, że

1) $A\cup(B\cap C)\subset(A\cup B)\cap(A\cup C)$

2) $(A\cup B)\cap(A\cup C)\subset A\cup(B\cap C)$

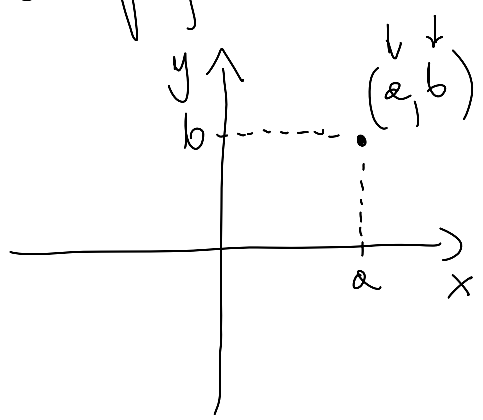
1) Niech $x\in A\cup(B\cap C)$. Wtedy $\boxed{x\in A}$ lub $x\in B\cap C$.
Jeżeli $x\in A$, to $x\in A\cup B$ i $x\in A\cup C$, więc $x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$. Jeżeli natomiast $x\in B\cap C$, to $x\in B$ i $x\in C$. Stąd $x\in A\cup B$ i $x\in A\cup C$, więc $x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

2) Niech $x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$. Wtedy $\boxed{x\in A\cup B}$ i $\boxed{x\in A\cup C}$

I) Jeżeli $x\in A$, to oczywiście $x\in A\cup(B\cap C)$.

II) Jeżeli $x\notin A$, to $\boxed{x\in B}$ i $\boxed{x\in C}$, więc $x\in B\cap C$ i ostatecznie $x\in A\cup(B\cap C)$.

Para uporządkowana i iloczyn kartezjański



← para uporządkowana

$(a,b)\neq(b,a)$

Def. Parą uporządkowaną o elementach a i b nazywamy zbiór

$$\{\{a\},\{a,b\}\}$$

i oznaczamy (a,b).

Tw. Dla dowolnych el. a, b, c, d para (a,b) jest równa parze (c,d) wtedy i tylko wtedy, gdy
$$a = c \quad i \quad b = d.$$

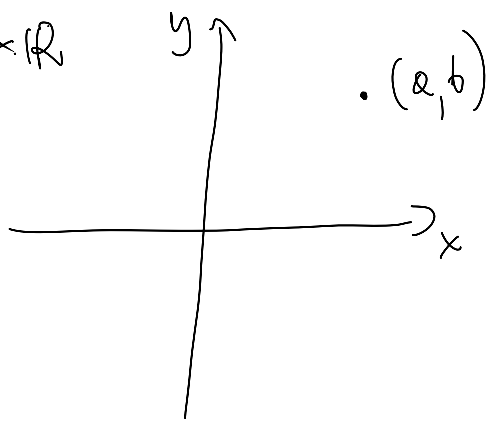
Dow. $\boxed{\text{skrypt.}}$

A, B - zbiory

Def. Iloczynem kartezjańskim $\underbrace{}_{}$ zbiorów A i B nazywamy zbiór wszystkich par uporządkowanych (a,b), gdzie $a \in A$ i $b \in B$ i oznaczamy $A \times B$.

$$A \times B = \{(a,b) : a \in A \ \text{i} \ b \in B\}$$

$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$



$$A \times A = A^2$$
$$A \times A \times A = A^3$$
$$\vdots$$

Antynomia Russella

$$\underline{A = \{x : \Phi(x)\}}$$

$$\Phi(x) = x \text{ jest zbiorem i } \boxed{x \notin x}.$$

$$\{1\} \overset{?}{\in} \{1\}$$

$$1 \in \{1\}$$
$$\{1\} \notin \{1\}$$
$$\{1\} \in \{\{1\}\}$$

$A = \{ x : x \text{ jest zbiorem i } \boxed{x \notin x} \}$

Pytanie: Czy $A \in A$?

X 1) Jeżeli $\underline{A \in A}$ (TAK), to $A \notin A$. sprz.

X 2) Jeżeli $A \notin A$ (NIE), to $A \in A$. sprz.

$\{ x : \Phi(x) \}$ ← To nie musi być zbiór.

Jeśli B jest zbiorem, to

$\{ \boxed{x \in B} : \Phi(x) \}$

będzie zbiorem.

PROBLEM STOPU

Indukcja matematyczna

$$(*) \quad \underbrace{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad n \in \mathbb{N}}$$

1) $n = 1$:

$L = 1^2 = 1 \qquad P = \frac{1\cdot(1+1)(2+1)}{6} = \frac{6}{6} = 1$

$L = P$

2) Krok indukcyjny

Ⓩ Załóżmy, że ta $\underbrace{\text{równość zachodzi}}$, dla pewnego $n \in \mathbb{N}$.

Ⓣ Chcemy pokazać, że ~~wtedy~~ równość ta zachodzi dla $n+1$.

$$\underbrace{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}_{L_n} = \underbrace{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}_{P_n}$$

1) $L_1 = P_1$

2) Niech $n \in \mathbb{N}$ i załóżmy, że

Ⓩ $L_n = P_n \qquad \left\{ 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right.$

Chcemy pokazać, że

Ⓣ $L_{n+1} = P_{n+1}. \qquad \left\{ 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \right.$

$$L_{n+1} = \underbrace{1^2 + 2^2 + \ldots + n^2}_{L_n} + (n+1)^2 = L_n + (n+1)^2 \overset{2}{=}$$

$$= P_n + (n+1)^2 = \underbrace{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}_{P_n} + (n+1)^2 =$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} = \frac{(n+1)[n(2n+1) + 6(n+1)]}{6} =$$

$$= \frac{(n+1)[2n^2 + n + 6n + 6]}{6} = \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6}$$

$$\frac{\cancel{(n+1)}(2n^2 + 7n + 6)}{\cancel{6}} \overset{?}{=} P_{n+1} = \frac{\cancel{(n+1)}(n+2)(2n+3)}{\cancel{6}}$$

$$\cancel{2n^2} + \cancel{7n} + \cancel{6} \overset{?}{=} \cancel{2n^2} + \cancel{3n} + \cancel{4n} + \cancel{6}$$

$$0 = 0 \quad \checkmark$$

$$\boxed{L_{n+1} = P_{n+1}}$$

- $(1+x)^n \geq 1 + nx$, $x \geq -1$, $n \geq N$

Nierówność Bernoulliego

1) $n=1$

$$(1+x)^1 \overset{?}{\geq} 1 + 1 \cdot x$$

$$1+x \geq 1+x \quad \checkmark$$

2) Niech $n \in \mathbb{N}$.

$\to$ Z $\quad (1+x)^n \geq 1 + nx$,

$\to$ T $\quad (1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x$

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n \cdot \boxed{(1+x)} \overset{Z}{\geq} (1+nx)(1+x) =$$

$$= 1 + x + nx + nx^2 = 1 + (n+1)x + \underbrace{nx^2}_{\geq 0} \geq$$

$$\geq 1 + (n+1)x$$

ZASADA INDUKCJI

Załóżmy, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ wyrażenie $p(n)$ jest zdaniem prawdziwym lub fałszywym.

Jeżeli

1) zdanie $p(1)$ jest prawdą,

2) dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ jeżeli zdanie

$p(n)$ jest prawdz., to zdanie $p(n+1)$
jest prawdz.,
to $p(n)$ jest prawdz. dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$.

Uwaga: 1) Zamiast zdań $p(1), p(2), \ldots$ możemy rozpatrywać zdania $p(m), p(m+1), p(m+2), \ldots$ dla ustalonego $m \in \mathbb{Z}$.

Np. $n! > 2^n$, $n \geq 4$

2) Zasada indukcji zupełnej:

Załóżmy, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ wyrażenie $p(n)$ jest zdaniem prawdziwym lub fałszywym.

Jeżeli

1) zdanie $p(1)$ jest prawdą,

2) dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ jeżeli wszystkie zdania $p(1), p(2), \ldots, p(n)$ są prawdą to zdanie $p(n+1)$ jest prawdą,

to $p(n)$ jest prawdą dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$.