IMIĘ i NAZWISKO (DRUKOWANE): ....

40 pkt.

Nr grupy: ....

Kolokwium II – 26 stycznia 2026 r.

- **Proszę o wyraźne podpisanie pracy. Imię i nazwisko muszą być DRUKOWANE.**
- **Proszę o wpisanie numeru grupy w postaci 1.x. Osoby powtarzające wpisują W.**
- **Proszę o czytelność – bez nadmiernych skreśleń, strzałek i dodatkowych kartek.**
- **Każde zadanie musi być rozwiązane na odpowiedniej stronie.**

1. Wyznacz resztę z dzielenia liczby

$$2^{5^{100}}$$

przez 27.

10 pkt.

Rozwiązanie: Ponieważ $\mathrm{NWD}(2, 27) = 1$ oraz $\phi(27) = 27 - 9 = 18$, to z twierdzenia Eulera wiemy, że

$$2^{18k} \equiv 1 \pmod{27}$$

dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$. Oznacza to, że

$$2^{5^{100}} \equiv 2^{5^{100} \bmod 18},$$

więc wystarczy wyznaczyć resztę z dzielenia 5^{100} przez 18. Mamy $\mathrm{NWD}(5, 18) = 1$, więc ponownie możemy użyć twierdzenia Eulera, otrzymując

$$5^{\phi(18)} = 5^6 \equiv 1 \pmod{18}.$$

Wystarczy teraz zauważyć, że $100 \mod 6 = 4$, co prowadzi do

$$5^{100} \equiv 5^4 = 25^2 \equiv 7^2 \equiv 13 \pmod{18}.$$

Ostatecznie

$$2^{5^{100}} \equiv 2^{13} = 2 \cdot 2^{12} = 2 \cdot (2^6)^2 = 2 \cdot 64^2 \equiv 2 \cdot 10^2 \equiv 2 \cdot 19 \equiv 11 \pmod{27}.$$

2. Rozwiąż układ kongruencji

10 pkt.

$$\begin{cases} 12x \equiv 96 \pmod{420}, \\ x \equiv 17 \pmod{64}. \end{cases}$$

i wyznacz jego najmniejsze rozwiązanie dodatnie.

Rozwiązanie: Ponieważ $\mathrm{NWD}(12, 420) = 12$ oraz $12 \mid 96$, to pierwsza z kongruencji jest równoważna

$$x \equiv 8 \pmod{35}. \tag{1}$$

Rozwiązania drugiej kongruencji są postaci

$$x = 17 + 64k, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Po wstawieniu do (1) otrzymujemy

$$17 + 64k \equiv 8 \pmod{35},$$

co po uproszczeniu daje

$$29k \equiv -9 \pmod{35}.$$

Wykorzystując rozszerzony algorytm Euklidesa, znajdujemy odwrotność 29 modulo 35, która jest równa 29. Otrzymujemy zatem

$$k \equiv -9 \cdot 29 \equiv 19 \pmod{35},$$

co po wstawieniu do x daje

$$x = 17 + 64(19 + 35l) = 1233 + 35 \cdot 64l, \qquad l \in \mathbb{Z}.$$

Najmniejszym rozwiązaniem dodatnim jest 1233.

3. Graf prosty G ma 20 wierzchołków i 31 krawędzi. Ponadto liczba wierzchołków stopnia 2 jest dwa razy większa od liczby wierzchołków stopnia 6. Pozostałe wierzchołki są stopnia 3. Wyznacz liczbę wierzchołków poszczególnych stopni.

10 pkt.

Rozwiązanie: Niech D_i oznacza liczbę wierzchołków stopnia i. Wtedy z treści zadania wiemy, że

$$D_2 + D_3 + D_6 = 20$$

oraz

$$D_2 = 2D_6.$$

Wstawiając drugą z tych równości do pierwszej, otrzymujemy

$$3D_6 + D_3 = 20. \tag{2}$$

Wiemy też jednak, że

$$2D_2 + 3D_3 + 6D_6 = 62,$$

czyli

$$3D_3 + 10D_6 = 62. \tag{3}$$

Wystarczy teraz rozwiązać układ równań (2)–(3). Z pierwszego równania $D_3 = 20 - 3D_6$, więc $60 - 9D_6 + 10D_6 = 62$, skąd

$$D_6 = 2$$

oraz

$$D_2 = 4, \qquad D_3 = 14.$$

4. Znajdź wszystkie rozwiązania całkowite x i y równania

10 pkt.

$$252x + 198y = 36.$$

Rozwiązanie: Zauważmy najpierw, wykorzystując na przykład algorytm Euklidesa, że $\mathrm{NWD}(252, 198) = 18$. Dzieląc podane równanie stronami przez 18, otrzymujemy

$$14x + 11y = 2.$$

Stosując rozszerzony algorytm Euklidesa otrzymujemy:

$$14 \cdot 4 + 11 \cdot (-5) = 1.$$

Mnożąc tę równość stronami przez 2, widzimy, że

$$14 \cdot 8 + 11 \cdot (-10) = 2.$$

Znaleźliśmy jedno rozwiązanie szczególne

$$x = 8, \qquad y = -10.$$

Widzimy teraz, że jeśli para (x, y) jest rozwiązaniem wyjściowego równania, to

$$14(x - 8) + 11(y + 5) = 0$$

lub równoważnie

$$14(x - 8) = -11(y + 5).$$

Ponieważ prawa strona ostatniej równości jest podzielna przez 11, to również lewa strona jest podzielna przez 11. Jednak $\mathrm{NWD}(14, 11) = 1$, więc 11 musi dzielić $x - 8$. To oznacza, że $x - 8 = 11k$ dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$, skąd

$$x = 8 + 11k.$$

Otrzymujemy stąd $11y = 2 - 14(8 + 11k) = -110 - 14 \cdot 11k$, czyli

$$y = -11 - 14k.$$

Jeżeli zatem para (x, y) spełnia wyjściowe równanie, to musi być postaci

$$\begin{cases} x = 8 + 11k, \\ y = -11 - 14k, \end{cases} \tag{4}$$

dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$. Ponieważ każda taka para spełnia rozważane równanie (łatwe sprawdzenie), to zbiór wszystkich rozwiązań jest dany przez (4) dla dowolnego $k \in \mathbb{Z}$.