IMIĘ i NAZWISKO (DRUKOWANE): ....

40 pkt.

Nr grupy: ....

Kolokwium I – 15 grudnia 2025 r.

- **Proszę o wyraźne podpisanie pracy. Imię i nazwisko muszą być DRUKOWANE.**
- **Proszę o wpisanie numeru grupy w postaci 1.x. Osoby powtarzające wpisują W.**
- **Proszę o czytelność – bez nadmiernych skreśleń, strzałek i dodatkowych kartek.**
- **Każde zadanie musi być rozwiązane na odpowiedniej stronie.**

1. Zbuduj formułę równoważną $p \oplus q$, wykorzystując wyłącznie funktor $\downarrow$ (NOR).

10 pkt.

Rozwiązanie: Zacznijmy od zapisania funktora $\oplus$ w postaci CNF, mianowicie

$$p \oplus q \equiv (p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q).$$

Z prawa de Morgana otrzymujemy zatem

$$\begin{aligned} p \oplus q &\equiv \neg\neg\big[(p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)\big] \equiv \\ &\equiv \neg\big[\neg(p \vee q) \vee \neg(\neg p \vee \neg q)\big] \equiv \\ &\equiv (p \downarrow q) \downarrow (\neg p \downarrow \neg q). \end{aligned}$$

Ostatecznie, ponieważ

$$\neg p \equiv p \downarrow p,$$

to

$$p \oplus q \equiv (p \downarrow q) \downarrow \big[(p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)\big].$$

2. Uzasadnij, że dla dowolnych zbiorów A, B i C zachodzi równość

$$(A \triangle B) \cap C = (A \cap C) \triangle (B \cap C).$$

10 pkt.

Rozwiązanie: Mamy

$$\begin{aligned}
(A \triangle B) \cap C &= \big[(A \setminus B) \cup (B \setminus A)\big] \cap C = && \text{(definicja różnicy symetrycznej)}\\
&= \big[(A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)\big] \cap C = && \text{(zamiana różnicy na iloczyn)}\\
&= \big[(A \cap B^c) \cap C\big] \cup \big[(B \cap A^c) \cap C\big] = && \text{(rozdzielność } \cap \text{ względem } \cup\text{)}\\
&= (A \cap B^c \cap C) \cup (A^c \cap B \cap C). && \text{(łączność i przemienność } \cap\text{)}
\end{aligned}$$

Z drugiej strony

$$\begin{aligned}
(A \cap C) \triangle (B \cap C) &= \big[(A \cap C) \cap (B \cap C)^c\big] \cup \big[(B \cap C) \cap (A \cap C)^c\big] = && \text{(definicja } \triangle\text{)}\\
&= \big[(A \cap C) \cap (B^c \cup C^c)\big] \cup \big[(B \cap C) \cap (A^c \cup C^c)\big] = && \text{(prawo de Morgana)}\\
&= \big[(A \cap C \cap B^c) \cup (A \cap C \cap C^c)\big] \cup \\
&\quad \cup \big[(B \cap C \cap A^c) \cup (B \cap C \cap C^c)\big] = && \text{(rozdzielność i łączność } \cap\text{)}\\
&= (A \cap C \cap B^c) \cup \emptyset \cup (B \cap C \cap A^c) \cup \emptyset = && (A \cap A^c = C \cap C^c = \emptyset)\\
&= (A \cap B^c \cap C) \cup (A^c \cap B \cap C). && \text{(przemienność } \cap\text{)}
\end{aligned}$$

Obie strony okazały się być równe, co kończy dowód.

3. Uzasadnij, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi równość

10 pkt.

$$(2n+1)+(2n+3)+\ldots+(4n-3)+(4n-1)=3n^2.$$

Rozwiązanie: Dowodzoną równość można zapisać równoważnie w postaci

$$\sum_{k=n}^{2n-1}(2k+1)=3n^2.$$

Dla $n=1$ otrzymujemy

$$3=3\cdot 1^2,$$

co jest oczywiście prawdą. Niech teraz n będzie dowolnie wybraną liczbą naturalną. Załóżmy, że

$$\underbrace{(2n+1)+(2n+3)+\ldots+(4n-3)+(4n-1)}_{L_n}=3n^2.$$

Musimy sprawdzić, że

$$\underbrace{(2(n+1)+1)+(2(n+1)+3)+\ldots+(4(n+1)-3)+(4(n+1)-1)}_{L_{n+1}}=3(n+1)^2.$$

Mamy

$$\begin{aligned}
L_{n+1}&=(2n+3)+(2n+5)+\ldots+(4n-1)+(4n+1)+(4n+3)=\\
&=(2n+1)+(2n+3)+\ldots+(4n-1)+(4n+1)+(4n+3)-(2n+1)=\\
&=L_n+(4n+1)+(4n+3)-(2n+1)=\\
&=3n^2+6n+3=\\
&=3(n^2+2n+1)=\\
&=3(n+1)^2,
\end{aligned}$$

co kończy dowód indukcyjny.

4. Rozważmy zbiór X, którego elementami są ciągi o wyrazach -1 lub 1 o długości 4. W X wprowadzamy relację $\sim$ wzorem

10 pkt.

$$(a_1, a_2, a_3, a_4) \sim (b_1, b_2, b_3, b_4) \quad \Leftrightarrow \quad a_1 + a_2 + a_3 + 2a_4 = b_1 + b_2 + b_3 + 2b_4$$

dla dowolnych $(a_1, a_2, a_3, a_4), (b_1, b_2, b_3, b_4) \in X$. Relacja $\sim$ jest relacją równoważności (nie musisz tego sprawdzać). Znajdź wszystkie klasy abstrakcji względem tej relacji.

Rozwiązanie: Dla dowolnego $(a_1, a_2, a_3, a_4) \in X$ oznaczmy

$$S\big((a_1, a_2, a_3, a_4)\big) = a_1 + a_2 + a_3 + 2a_4.$$

Klasy abstrakcji będą zbiorami elementów X o równych sumach S. Dla wyrazów -1 i 1 rozważana suma może być równa -5, -3, -1, 1, 3 lub 5. Otrzymujemy zatem sześć różnych klas abstrakcji. Są to

$$\begin{aligned}
&\big\{(1,1,1,1)\big\},\\
&\big\{(1,1,-1,1),(1,-1,1,1),(-1,1,1,1)\big\},\\
&\big\{(1,1,1,-1),(1,-1,-1,1),(-1,1,-1,1),(-1,-1,1,1)\big\},\\
&\big\{(1,1,-1,-1),(1,-1,1,-1),(-1,1,1,-1),(-1,-1,-1,1)\big\},\\
&\big\{(1,-1,-1,-1),(-1,1,-1,-1),(-1,-1,1,-1)\big\},\\
&\big\{(-1,-1,-1,-1)\big\}.
\end{aligned}$$