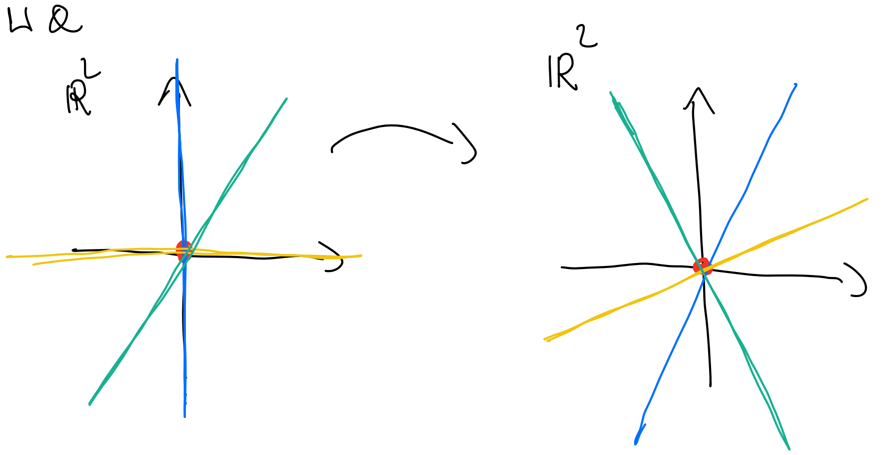
Algebra liniowa

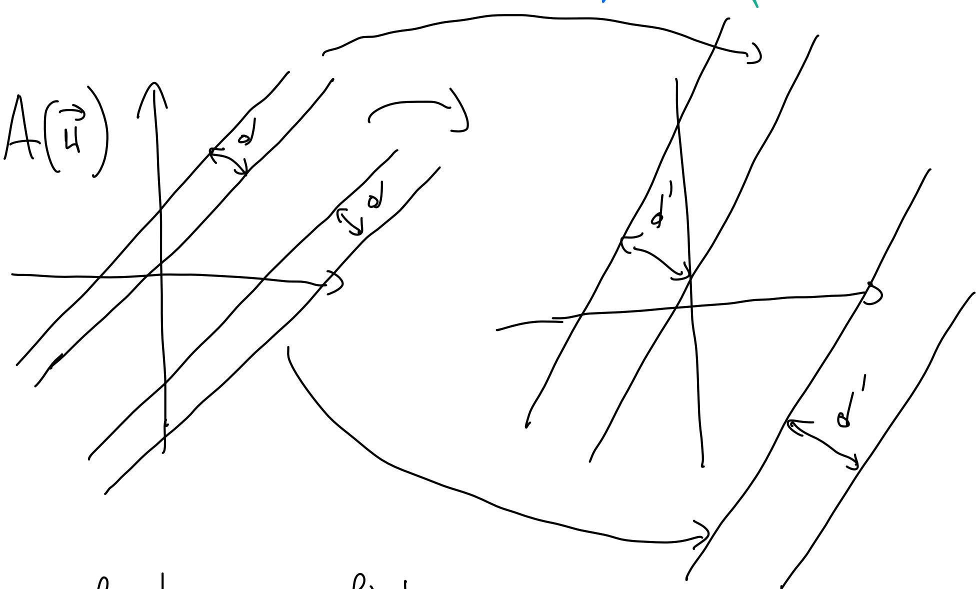
$A: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$



Przekształcenie liniowe

1) $\bigwedge_{\vec{v},\vec{w}\in\mathbb{R}^2} A(\vec{v}+\vec{w}) = A(\vec{v}) + A(\vec{w})$

2) $\bigwedge_{\substack{\vec{v}\in\mathbb{R}^2 \\ a\in\mathbb{R}}} A(a\vec{v}) = a A(\vec{v})$



funkcja afiniczna

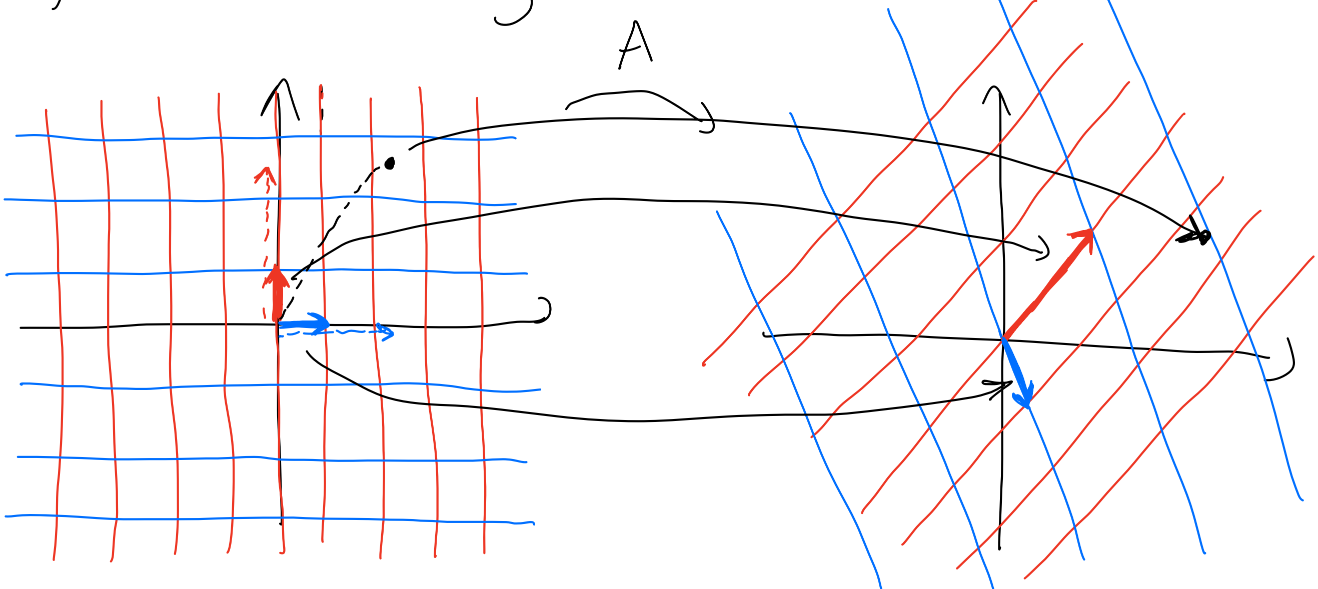
funkcja liniowa

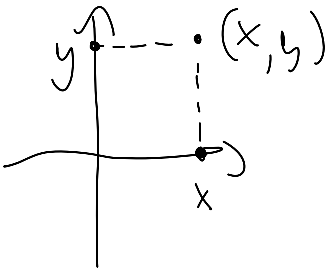
$\boxed{f(x) = \boxed{ax} + b}$ $\quad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

to jest przekształcenie liniowe $\iff b = 0$

$f(x+y) \overset{?}{=} f(x) + f(y)$

$a(x+b) + b = ax + ay + b$





$$(x,y) = (x,0) + (0,y) =$$
$$= x(1,0) + y(0,1) =$$
$$= x\vec{i} + y\vec{j} =$$
$$= x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$$

$$A((x,y)) = A(x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2) \overset{1)}{=} A(x\vec{e}_1) + A(y\vec{e}_2) =$$
$$\overset{2)}{=} x\,A(\vec{e}_1) + y\,A(\vec{e}_2)$$

$$A(\vec{v}) \overset{\text{ozn}}{=} A\vec{v}$$

$$A\vec{e}_1 = (a,c) \qquad A\vec{e}_2 = (b,d) \quad , \quad a,b,c,d \in \mathbb{R}$$

$$A \sim \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$A(x,y) = ?$$

$$A(x,y) = x A\vec{e}_1 + y A\vec{e}_2 = x(a,c) + y(b,d) =$$
$$= (xa, xc) + (yb, yd) = (ax+by, cx+dy)$$

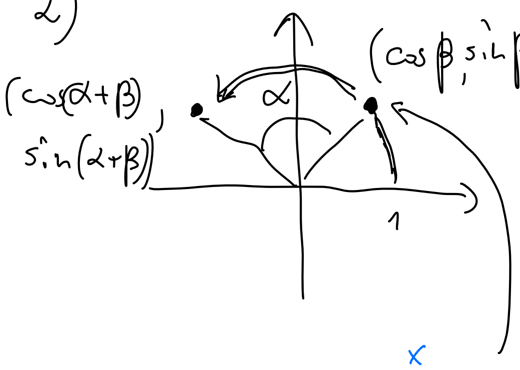
$$\boxed{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{bmatrix}}$$

1)

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ 3y \end{bmatrix}$$

jednokładność

2)



$$\underset{\alpha}{z}\,\underset{\beta}{w} = \overset{1}{|z|}\,\overset{1}{|w|}\left(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)\right) =$$

$$= (\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) =$$

$$= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$+\, i\,(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)$$

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}\begin{array}{c} x \\ \begin{bmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{bmatrix} \\ y \end{array} = \begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix}$$

$\alpha = \frac{\pi}{6}$

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \leftarrow \text{macierz obrotu o } 30^\circ$$

Macierze

Macierze

Macierzą wymiaru $n \times m$ (o n wierszach i m kolumnach) nazywamy tablicę liczb rzeczywistych/zespolonych

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\overset{m}{\cancel{n}}} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2\overset{m}{\cancel{n}}} \\ \vdots & \vdots & \boxed{a_{ij}} & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}.$$

wyraz w i-tym wierszu i j-tej kolumnie

a[i][j]

Piszemy również

$$A = [a_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}}$$

lub

$$A = [a_{ij}].$$

Dodawanie i odejmowanie macierzy

Jeżeli $A, B \in \mathbb{R}_{n\times m}$ (czyli macierze A i B są dokładnie tego samego wymiaru), to definiujemy $A \pm B$ wzorem

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & \dots & b_{2m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \pm b_{11} & \dots & a_{1m} \pm a_{1m} \\ a_{21} \pm b_{21} & \dots & a_{2m} \pm b_{2m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} \pm b_{n1} & \dots & a_{nm} \pm b_{nm} \end{bmatrix}.$$

Równoważnie

$$A + B = [a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}].$$

Mnożenie macierzy przez liczbę

Niech $c \in \mathbb{R}$. Wtedy

$$c \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ca_{11} & \dots & ca_{1m} \\ ca_{21} & \dots & ca_{2m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ ca_{n1} & \dots & ca_{nm} \end{bmatrix}.$$

Równoważnie

$$cA = c[a_{ij}] = [ca_{ij}].$$

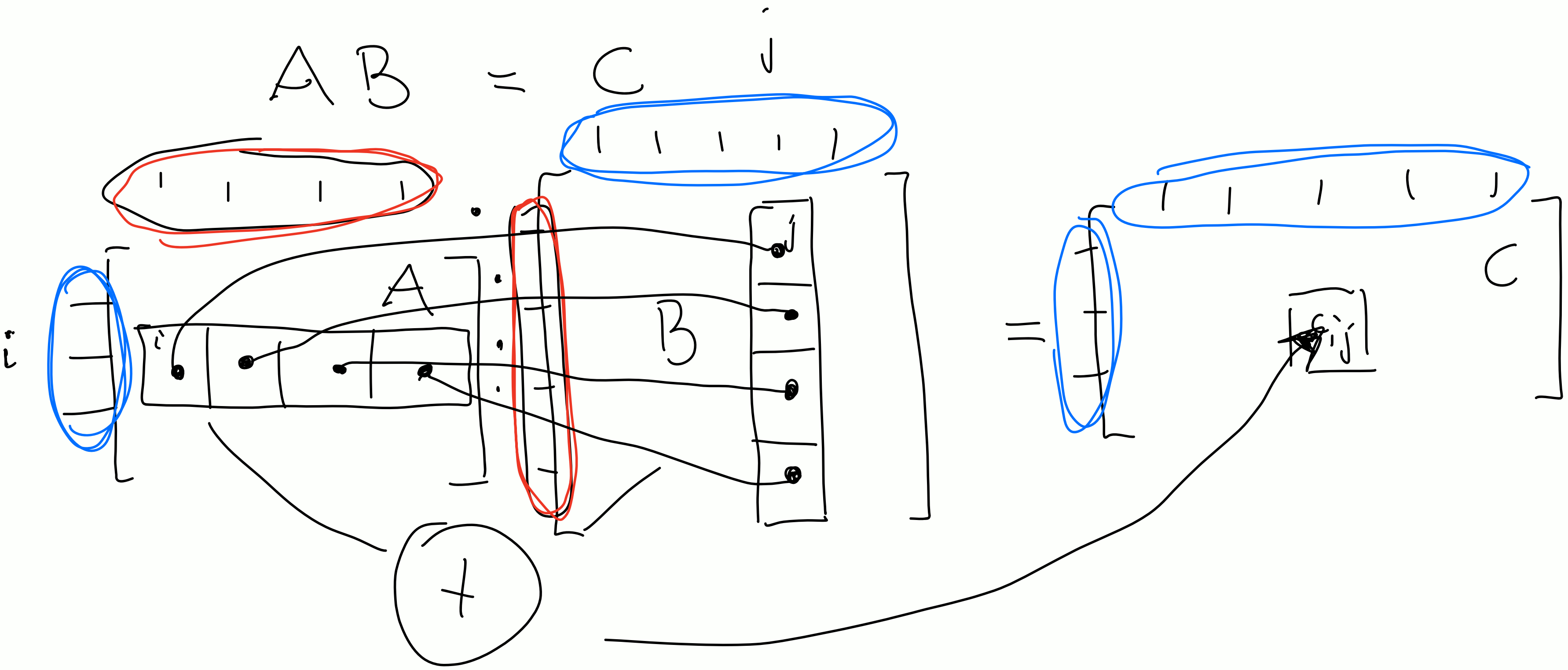
Własności

- $A + B = B + A$
- $A + (B + C) = (A + B) + C$
- $c(A + B) = cA + cB$
- $(c + d)A = cA + dA$
- $(cd)A = c(dA)$

Mnożenie macierzy

Niech $A \in \mathbb{R}_{n\times m}$ i $B \in \mathbb{R}_{m\times k}$. Definiujemy wtedy iloczyn $C = A \cdot B$ wzorem

$$C = [c_{ij}] \in \mathbb{R}_{n\times k}, \qquad c_{ij} = \sum_{r=1}^{m} a_{ir} b_{rj}.$$



Ćwieczenie

Wykonać działania

$$4 \times 3 \qquad\qquad 3 \times 4 \qquad\qquad 4 \times 4$$

$$2\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} c_{11} & c_{12} & & \end{array} \\ \begin{bmatrix} \boxed{7} & \boxed{8} & \boxed{-1} & \boxed{10} \\ 4 & 2 & 4 & 8 \\ -2 & 2 & 0 & 8 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

Własności iloczynu

- $A(B+C) = AB + AC$ dla $A \in \mathbb{R}_{n\times m}$ i $B, C \in \mathbb{R}_{m\times k}$
- $(A+B)C = AC + BC$ dla $A, B \in \mathbb{R}_{n\times m}$ i $C \in \mathbb{R}_{m\times k}$
- $c(AB) = (cA)B = A(cB)$ dla $A \in \mathbb{R}_{n\times m}$, $B \in \mathbb{R}_{m\times k}$ i $c \in \mathbb{R}$
- $(AB)C = A(BC) = ABC$ dla $A \in \mathbb{R}_{n\times m}$, $B \in \mathbb{R}_{m\times k}$ i $C \in \mathbb{R}_{k\times \ell}$
- $AI_m = I_nA$ dla $A \in \mathbb{R}_{n\times m}$

$A \in \mathbb{R}_{n\times n}$

$AI_n = I_nA = A$

I_n - macierz jednostkowa

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Uwagi

Mnożenie macierzy **nie jest** przemienne! Najczęściej $AB \neq BA$.

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\2 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1\\3 & 2\end{bmatrix}$$

$$\not=$$

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 1\\3 & 1\end{bmatrix}$$

$f(g) \neq g(f)$

Uwagi

$(AB)C = A(BC)$, ale jeden z iloczynów może być łatwiejszy do policzenia!

$$\overset{A}{\left(\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\right.}\!\!\underset{3\times 1}{}\;\overset{B}{\begin{bmatrix}3 & 1 & 1\end{bmatrix}}\underset{1\times 3}{}\left.\vphantom{\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}}\right)\overset{C}{\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}}, \qquad \overset{A}{\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}}\left(\overset{B}{\begin{bmatrix}3 & 1 & 1\end{bmatrix}}\overset{C}{\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}}\right)$$

A: 3×1, B: 1×3 $\qquad$ B: 1×3, C: 3×1

$$\underset{3\times 3}{\overset{AB}{\begin{bmatrix}3 & 1 & 1\\6 & 2 & 2\\9 & 3 & 3\end{bmatrix}}}\;\underset{3\times 1}{\overset{C}{\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}}} \qquad\qquad \underset{3\times 1}{\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}}\;\underset{1\times 1}{\begin{bmatrix}7\end{bmatrix}}$$

$$\begin{bmatrix}7\\14\\21\end{bmatrix} \qquad\qquad \begin{bmatrix}7\\14\\21\end{bmatrix}$$

Liczba mnożeń

$AB = C$, $A \in \mathbb{R}_{\underline{n} \times m}$ $B \in \mathbb{R}_{m \times \underline{k}}$

$$\underline{c_{ij}} = \sum_{r=1}^{m} a_{ir} b_{rj} \leftarrow m \text{ mnożeń}$$

$C \in \mathbb{R}_{n \times k} \leftarrow n \cdot k$ elementów

Koszt mnożenia $AB = \boxed{n \cdot m \cdot k}$

$A, B \in \mathbb{R}_{n \times n}$ $= n^3$ mnożeń

Strassen $n^{2,7}$ ⋮ $n^{2,36}$ ⋮ n^2 1969

$(a+b)(c+d) =$

$= ac + ad + bc + bd$

$=$ 3 mnożenia

Liczba mnożeń

Niech $A \in \mathbb{R}_{20\times 2}$, $B \in \mathbb{R}_{2\times 10}$, $C \in \mathbb{R}_{10\times 1}$.

Koszt obliczenia $(AB)C$:

- $\rightsquigarrow$ AB: $20\cdot 2\cdot 10 = \cancel{8}\ 400$
- $\rightsquigarrow$ $(AB)C$: $20\cdot 10\cdot 1 = 200$

20×10

600

Koszt obliczenia $A(BC)$:

- $\rightsquigarrow$ BC: $2\cdot 10\cdot 1 = 20$
- $\rightsquigarrow$ $A(BC)$: $20\cdot 2\cdot 1 = 40$

2×1

60

Problem optymalnego nawiasowania

$$(A_1(A_2 \ldots)) \ldots (A_n)$$

$\sim 4^n$

$((AB)C)D$

$(AB)(CD)$

$(A(BC))D$

$A((BC)D)$

$A(B(CD))$

$ABCD$

?

Problem optymalnego nawiasowania

Znaleźć optymalne nawiasowanie dla iloczynu

$$A_1 A_2 \ldots A_n.$$

$$A_1 A_2 \ldots [A_i \ldots A_j] \ldots A_n$$

znamy optymalne nawiasowanie

$$(A_1 (A_2 [A_3)) (A_4 (A_5 A_6]) A_7 A_8$$

Własność optymalnej podstruktury

Twierdzenie

Optymalne rozwiązanie zagadnienia nawiasowania jest funkcją optymalnych rozwiązań podproblemów, to znaczy w optymalnym nawiasowaniu $A_1 \ldots A_n$ każdy blok $A_i \ldots A_j$ powinien być nawiasowany według optymalnego nawiasowania tego bloku.

$$(A_1 \quad [A_i \ldots A_k)(A_{k+1} \quad A_j] \quad A_n)$$

$$A((B(CD))E)$$

$$(A\boxed{((BC)(D))}E)$$

Algorytm dynamiczny dla problemu nawiasowania

$i, j \in \{1, \dots, n\}$

⇝ $k[i][j]$ – minimalny koszt mnożenia macierzy $A_i \dots A_j$, gdzie $A_i \in \mathbb{R}^{a_i \times a_{i+1}}$, $A_{i+1} \in \mathbb{R}^{a_{i+1} \times a_{i+2}}$, ..., $A_j \in \mathbb{R}^{a_j \times a_{j+1}}$ ← da się pokroić

$k[1][n]$?

Algorytm dynamiczny dla problemu nawiasowania

- $k[i][j]$ – minimalny koszt mnożenia macierzy $A_i \ldots A_j$, gdzie $A_i \in \mathbb{R}_{a_i \times a_{i+1}}$, $A_{i+1} \in \mathbb{R}_{a_{i+1} \times a_{i+2}}$, ..., $A_j \in \mathbb{R}_{a_j \times a_{j+1}}$

- $k[i][i] := 0$

Algorytm dynamiczny dla problemu nawiasowania

- $k[i][j]$ – minimalny koszt mnożenia macierzy $A_i \ldots A_j$, gdzie $A_i \in \mathbb{R}_{a_i \times a_{i+1}}$, $A_{i+1} \in \mathbb{R}_{a_{i+1} \times a_{i+2}}$, ..., $A_j \in \mathbb{R}_{a_j \times a_{j+1}}$
- $k[i][i] := 0$
- $k[i][j] := \min_{i \leqslant m < j} \{k[i][m] + k[m+1][j] + a_i a_{m+1} a_{j+1}\}$

$A_i \ldots A_j$

$A_i \ldots A_m$ $\quad$ $A_{m+1} \ldots A_j$ $\quad$ koszt mnożenia

$(A_i \ldots A_m)(A_{m+1} \ldots A_j)$

$(A_i \ldots A_m)(A_{m+1} \ldots A_j)$

Algorytm dynamiczny dla problemu nawiasowania

- $k[i][j]$ – minimalny koszt mnożenia macierzy $A_i \ldots A_j$, gdzie $A_i \in \mathbb{R}_{a_i \times a_{i+1}}$, $A_{i+1} \in \mathbb{R}_{a_{i+1} \times a_{i+2}}$, ..., $A_j \in \mathbb{R}_{a_j \times a_{j+1}}$
- $k[i][i] := 0$
- $k[i][j] := \min_{i \leqslant m < j}\{k[i][m] + k[m+1][j] + a_i a_{m+1} a_{j+1}\}$
- $k[1][n]$ – rozwiązanie problemu

Algorytmy dynamiczne

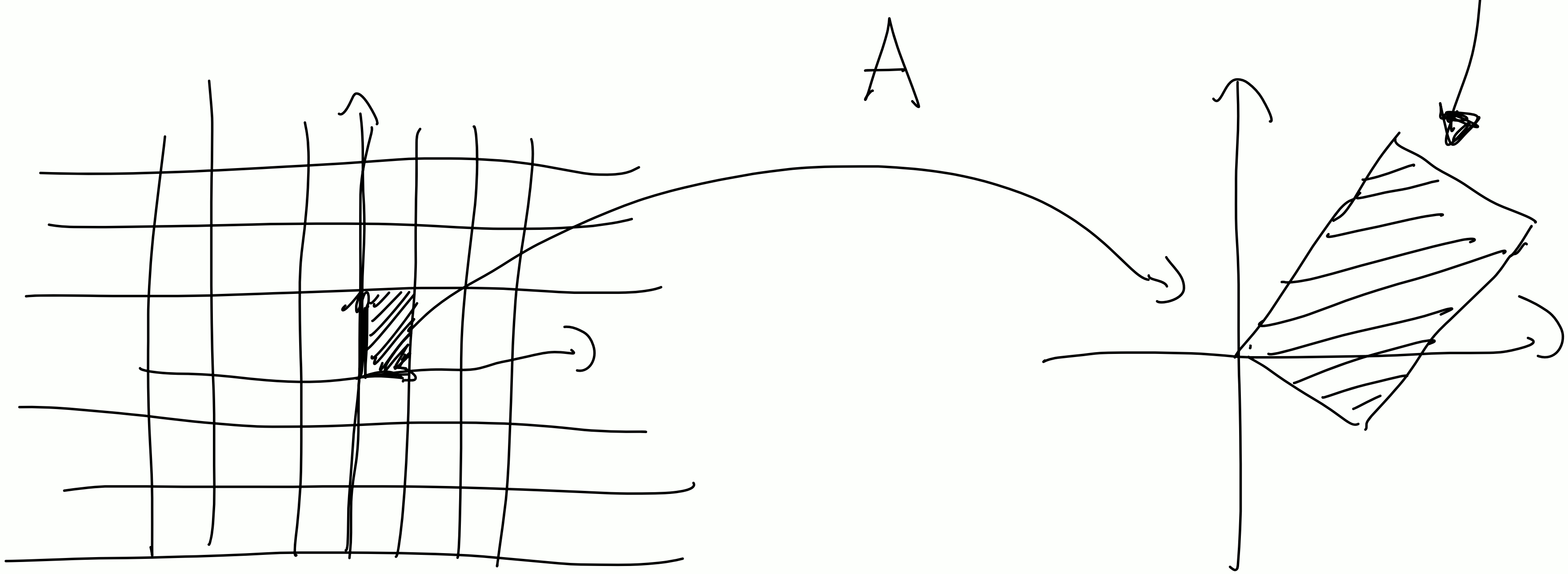
Podobne podejście można stosować do

- problemu plecakowego,
- problemu komiwojażera,
- obliczania odległości Levenshteina,
- ...

Wyznaczniki

$f(\quad) = $ liczba

macierz



Wyznaczniki

Niech A będzie macierzą kwadratową stopnia n. **Wyznacznikiem** macierzy A nazywamy liczbę $\det A$ (lub $|A|$) zdefiniowaną rekurencyjnie

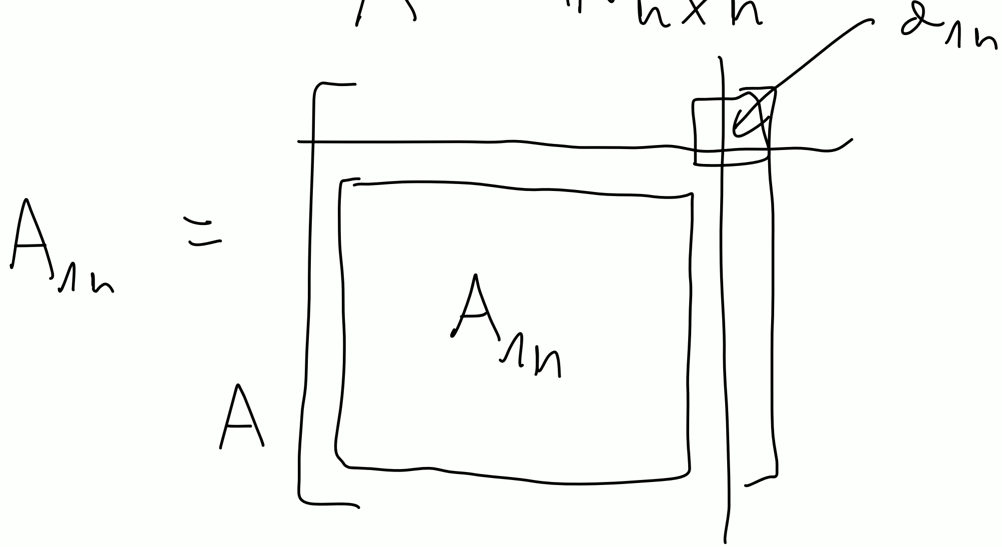
- $\det A = a_{11}$ dla $n = 1$ i $A = [a_{11}]$ $\qquad A \in \mathbb{R}_{1\times 1}$

Wyznaczniki

Niech A będzie macierzą kwadratową stopnia n. **Wyznacznikiem** macierzy A nazywamy liczbę $\det A$ (lub $|A|$) zdefiniowaną rekurencyjnie

- $\det A = a_{11}$ dla $n = 1$ i $A = [a_{11}]$
- $\det A =$
  $(-1)^{1+n}\boxed{a_{1n}\det A_{1n}} + (-1)^{2+n}a_{2n}\det A_{2n} + \cdots + (-1)^{n+n}a_{nn}\det A_{nn}$
  dla $n > 1$, gdzie A_{in} jest macierzą powstałą z macierzy A przez skreślenie i-tego wiersza i n-tej kolumny

$A \in \mathbb{R}_{n \times n}$



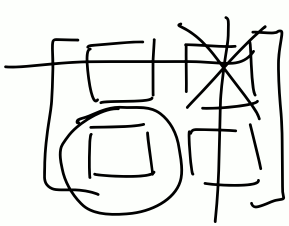
Wyznaczniki

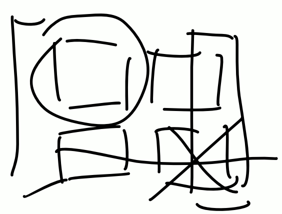
Niech A będzie macierzą kwadratową stopnia n. **Wyznacznikiem** macierzy A nazywamy liczbę $\det A$ (lub $|A|$) zdefiniowaną rekurencyjnie

- $\det A = a_{11}$ dla $n = 1$ i $A = [a_{11}]$
- $\det A =$
  $(-1)^{1+n} a_{1n} \det A_{1n} + (-1)^{2+n} a_{2n} \det A_{2n} + \cdots + (-1)^{n+n} a_{nn} \det A_{nn}$
  dla $n > 1$, gdzie A_{in} jest macierzą powstałą z macierzy A przez skreślenie i-tego wiersza i n-tej kolumny

Dla $n = 2$ mamy

$$\det \begin{array}{c} \begin{matrix} + & \quad - \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \end{array} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$





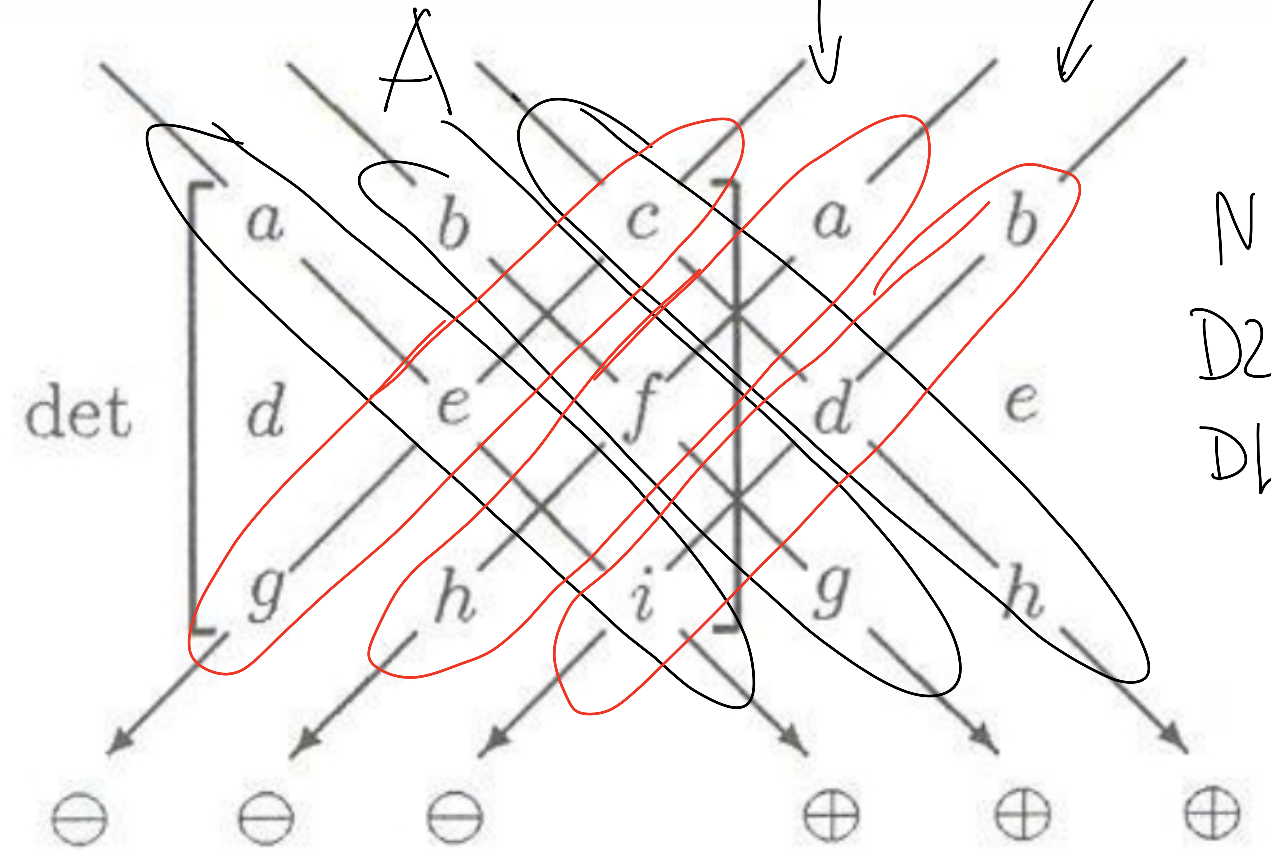
Dla $n = 3$ mamy

$$\det \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = (aei + bfg + cdh) - (ceg + afh + bdi).$$

Dla $n = 3$ mamy

$$\det \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = (aei + bfg + cdh) - (ceg + afh + bdi).$$

1-sza kol. 2-ga kol.



NIE DZIAŁA DLA $n>3$

Własności wyznaczników

- $\det A = \det A^T$, gdzie A^T jest **transpozycją** macierzy A, to znaczy macierzą, w której wiersze macierzy A są kolumnami macierzy A^T ($A^T = [a_{ji}]$)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Własności wyznaczników

- $\det A = \det A^T$, gdzie A^T jest **transpozycją** macierzy A, to znaczy macierzą, w której wiersze macierzy A są kolumnami macierzy A^T $(A^T = [a_{ji}])$
- $$\det \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \hphantom{a_{11}} & \hphantom{\dots} & \overbrace{\hphantom{a_{1i}+a'_{1i}}}^{i\text{-ta kol.}} & \hphantom{\dots} & \hphantom{a_{1n}} \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i}+a'_{1i} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni}+a'_{ni} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \end{array} =$$

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a'_{1i} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a'_{ni} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Własności wyznaczników

- Jeśli macierz B powstała z macierzy A przez pomnożenie jednej kolumny przez liczbę $c \in \mathbb{R}$, to $\det B = \cancel{a} \det A$.

  c

Własności wyznaczników

- Jeśli macierz B powstała z macierzy A przez pomnożenie jednej kolumny przez liczbę $c \in \mathbb{R}$, to $\det B = a \det A$.
- Jeśli macierz A zawiera dwie proporcjonalne (w szczególności identyczne) kolumny, to $\det A = 0$.

Własności wyznaczników

- Jeśli macierz B powstała z macierzy A przez pomnożenie jednej kolumny przez liczbę $c \in \mathbb{R}$, to $\det B = a \det A$.
- Jeśli macierz A zawiera dwie proporcjonalne (w szczególności identyczne) kolumny, to $\det A = 0$.
- Jeśli macierz B powstała z macierzy A przez dodanie do jednej kolumny innej pomnożonej przez liczbę c, to $\det B = \det A$.

Własności wyznaczników

- Jeśli macierz B powstała z macierzy A przez pomnożenie jednej kolumny przez liczbę $c \in \mathbb{R}$, to $\det B = a \det A$.
- Jeśli macierz A zawiera dwie proporcjonalne (w szczególności identyczne) kolumny, to $\det A = 0$.
- Jeśli macierz B powstała z macierzy A przez dodanie do jednej kolumny innej pomnożonej przez liczbę c, to $\det B = \det A$.
- Jeśli macierz B powstała z macierzy A przez zamianę miejscami dwóch kolumn, to $\det B = -\det A$.

Własności wyznaczników

- Jeśli macierz B powstała z macierzy A przez pomnożenie jednej kolumny przez liczbę $c \in \mathbb{R}$, to $\det B = a \det A$.
- Jeśli macierz A zawiera dwie proporcjonalne (w szczególności identyczne) kolumny, to $\det A = 0$.
- Jeśli macierz B powstała z macierzy A przez dodanie do jednej kolumny innej pomnożonej przez liczbę c, to $\det B = \det A$.
- Jeśli macierz B powstała z macierzy A przez zamianę miejscami dwóch kolumn, to $\det B = -\det A$.

Wszystkie wymienione własności zachodzą również dla wierszy.

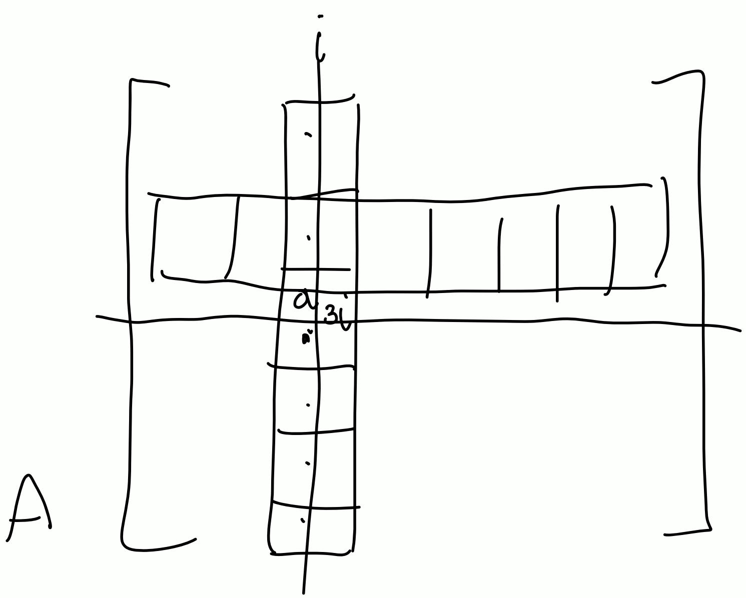
Wzór Laplace'a

Niech $A \in \mathbb{R}_{n \times n}$ dla $n > 1$. Dla dowolnego i mamy

$$\det A = (-1)^{1+i} a_{1i} \det A_{1i} + (-1)^{2+i} a_{2i} \det A_{2i} + \cdots + \\ + (-1)^{n+i} a_{ni} \det A_{ni}$$

oraz

$$\det A = (-1)^{i+1} a_{i1} \det A_{i1} + (-1)^{i+2} a_{i2} \det A_{i2} + \cdots + \\ + (-1)^{i+n} a_{in} \det A_{in}.$$



$$(-1)^{3+i} \cdot \det A_{3i}$$

Wzór Cauchy'ego

Dla $A, B \in \mathbb{R}_{n\times n}$ mamy

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B.$$

Ćwiczenie

Sprawdzić, że

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}.$$

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix} = (-1)^{1+1} a_{11} \cdot \det \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots \\ 0 & a_{33} & \dots \\ & & \ddots \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$1$$

Macierz odwrotna

Macierz $A \in \mathbb{R}_{n \times n}$ nazywamy **odwracalną**, jeżeli istnieje taka macierz $B \in \mathbb{R}_{n \times n}$, że

$$AB = BA = I_n.$$

Macierz odwrotna

Macierz $A \in \mathbb{R}_{n \times n}$ nazywamy **odwracalną**, jeżeli istnieje taka macierz $B \in \mathbb{R}_{n \times n}$, że

$$AB = BA = I_n.$$

Macierz B nazywamy macierzą **odwrotną** do A i oznaczamy A^{-1}.

Macierz odwrotna

Twierdzenie

Macierz $A \in \mathbb{R}_{n\times n}$ ma macierz odwrotną wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\det A \neq 0.$$

Macierz odwrotna

Twierdzenie

Macierz $A \in \mathbb{R}_{n\times n}$ *ma macierz odwrotną wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\det A \neq 0.$$

Macierz $A^{-1} = [b_{ij}]$ *dana jest wtedy wzorem*

$$b_{ij} = (-1)^{i+j} \frac{\det A_{ji}}{\det A},$$

gdzie A_{ji} *jest macierzą powstałą z macierzy* A *przez skreślenie* j*-tego wiersza oraz* i*-tej kolumny.*

Własności

- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Algorytm Gaussa

$$[A|I_n] \xrightarrow{\text{operacje elementarne}} [I_n|A^{-1}]$$

Algorytm Gaussa

$$[A|I_n] \xrightarrow{\text{operacje elementarne}} [I_n|A^{-1}]$$

Operacje elementarne

- $\rightsquigarrow$ mnożenie wiersza przez liczbę różną od zera,
- $\rightsquigarrow$ zamiana wierszy miejscami,
- $\rightsquigarrow$ dodanie do wiersza innego wiersza pomnożonego przez liczbę.

Ćwiczenie

Wyznaczyć dwiema metodami macierze odwrotne do macierzy

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6. \end{bmatrix}$$