Liczby zespolone

Czy równanie

$$x+1=0$$

ma rozwiązanie?

$$\cancel{x=-1}$$

To zależy, gdzie tych rozwiązań szukamy!

w $\mathbb{Z}$ | w $\mathbb{N}$
TAK | NIE

Czy równanie

$$2x=3$$

ma rozwiązanie?

TAK | NIE
w $\mathbb{Q}$ | w $\mathbb{Z}$

Czy równanie

$$x^2 = 2$$

ma rozwiązanie?

TAK w $\mathbb{R}$

NIE w $\mathbb{Q}$

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \ ?$$

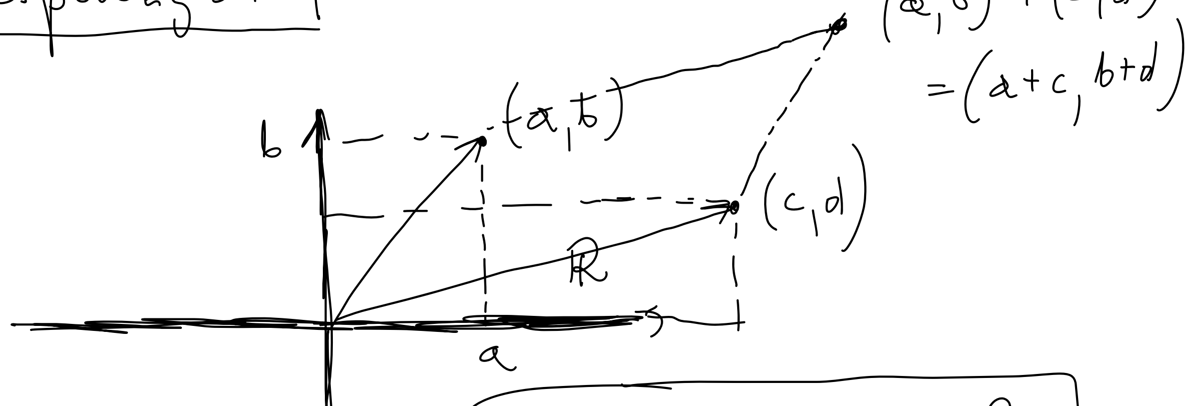
Czy równanie

$$x^2 + 1 = 0 \quad \left\{ x^2 = -1 \right.$$

ma rozwiązanie?

TAK w zbiorze liczb zespolonych

NIE w $\mathbb{R}$



$$\boxed{(a, b) \cdot (c, d) = \ ?}$$

Liczby zespolone

Wprowadźmy w zbiorze $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ następujące działania:

- dodawanie
$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d),$$
- mnożenie
$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Liczby zespolone

Wprowadźmy w zbiorze $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ następujące działania:

- dodawanie

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d),$$

- mnożenie

$$\boxed{(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc).}$$

Zbiór $\mathbb{R}^2$ z takimi działaniami $+$ i $\cdot$ nazywamy zbiorem **liczb zespolonych** i oznaczamy $\underline{\mathbb{C}}$.

$\mathbb{C}$

$$\cancel{(a, b) \cdot (c, d) = (a \cdot c, b \cdot d)} \; ?$$

$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

$$\mathbb{C} = \{(a,b) : a,b \in \mathbb{R}\}$$

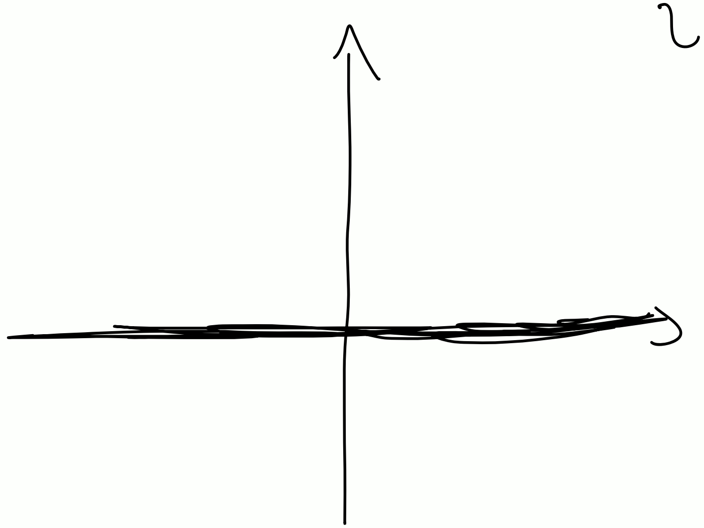
$$(a,b)\cdot(c,d) = (ac-bd,\ ad+bc)$$

$$\{(a,0) : a \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}$$

$$\wr$$

$$\mathbb{R}$$

$$\boxed{(a,0) \sim a}$$



$a,b \in \mathbb{R}$	$\{(a,0)\} \subset \mathbb{C}$
$\underline{a+b}$	$(a,0)+(b,0) = (\underline{a+b},0)$
$\underline{a\cdot b}$	$(a,0)\cdot(b,0) = (ab-0,\ 0+0) = (\underline{ab},\ 0)$

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

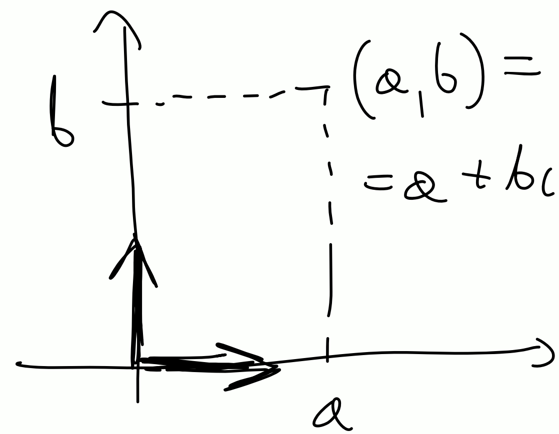
$i \quad \boxed{(a,b)(c,d) = (ac-bd,\ ad+bc)}$

$(a,b) \in \mathbb{C}$

$$(a,b) = (a,0) + (0,b) = (a,0)(1,0) + (b,0)(0,1)$$

$$= a + b\underbrace{\boxed{(0,1)}}_{i} =$$

$$= \underline{\underline{a + bi}}$$



$$\boxed{i^2} = (0,1)\cdot(0,1) = (0-1,\ 0+0) = (-1,0) = \boxed{-1}$$

$$x^2 + 1 = 0 \ ?$$

NIE w $\mathbb{R}$

TAK w $\mathbb{C}$ $\quad x = i \vee x = -i$

Działania

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,\ b+d)$$

$$(a,b)\cdot(c,d)=(\underline{ac-bd},\ \underline{ad+bc})$$

$$(a+bi)+(c+di)=a+bi+c+di=$$

$$=a+c+(b+d)i$$

$$(a+bi)\cdot(c+di)=ac+adi+bic+bidi=$$

$$=ac+(ad+bc)i+bd\,i^2=$$

$$i^2=-1$$

$$=\underline{ac-bd}+(\underline{ad+bc})i$$

Definicje

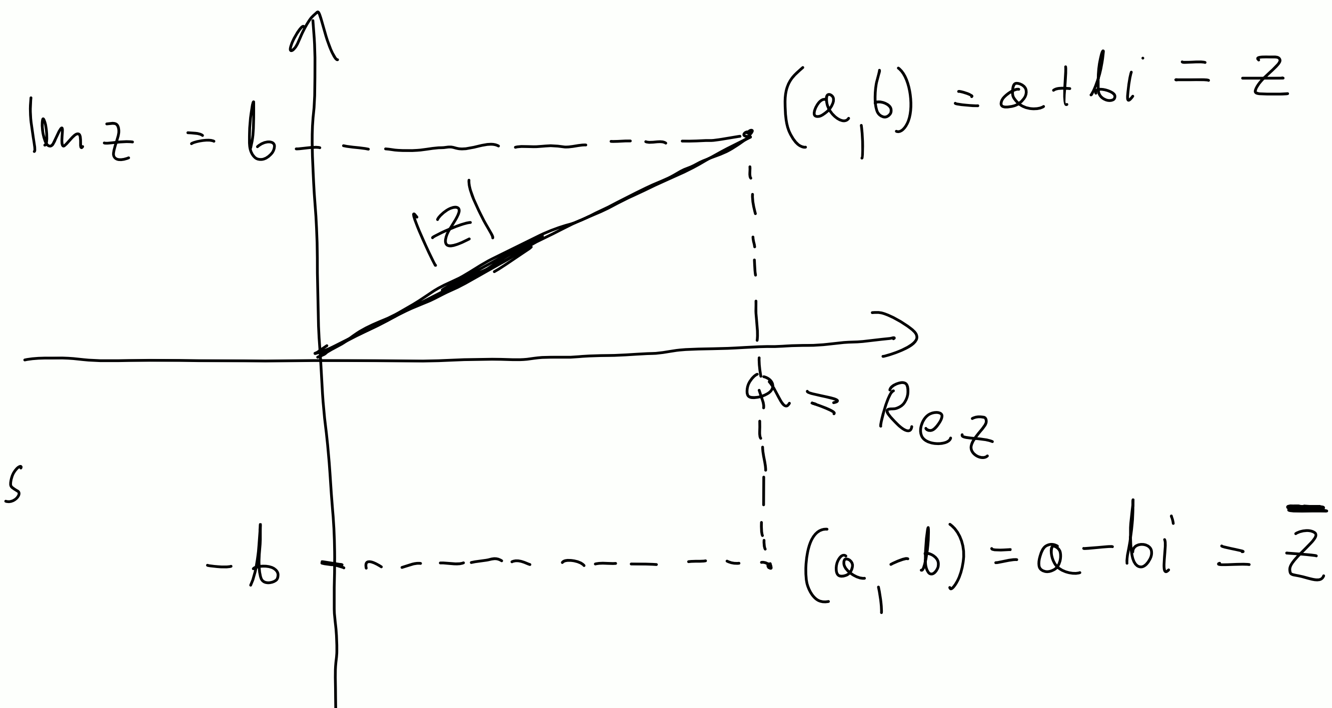
i – jednostka urojona

Niech $z = a + bi \in \mathbb{C}$.

- Liczba z jest punktem (a, b) na płaszczyźnie zespolonej $\mathbb{C}$.
- Liczbę $\bar{z} = a - bi$ nazywamy **sprzężeniem** liczby z.
- Liczbę nieujemną $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ nazywamy **modułem** liczby z.
- Liczbę $\operatorname{Re} z = a$ nazywamy **częścią rzeczywistą** liczby z.
- Liczbę $\operatorname{Im} z = b$ nazywamy **częścią urojoną** liczby z.

Realis

Imaginaris



$(a,b) = a + bi$

Własności

$\operatorname{Im} z \in \mathbb{R}$

- $z = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z$
- Równość $z = w$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\operatorname{Re} z = \operatorname{Re} w, \qquad \operatorname{Im} z = \operatorname{Im} w.$$

- $z\bar{z} = |z|^2.$ $\leftarrow$
- Jeżeli $z \neq 0$, to

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

$$z\bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 - \cancel{abi} + \cancel{bia} - b^2 \underset{-1}{i^2} = a^2 + b^2$$

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}} = \frac{1-\sqrt{2}}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})} = \frac{1-\sqrt{2}}{1-2} = \sqrt{2}-1$$

Przykłady

- Obliczyć

$$(2+i)(3-4i).$$

- Obliczyć

$$\frac{3+2i}{2-i}.$$

1. $= 6 - 8i + 3i - 4i^2 = 6 - 5i + 4 = 10 - 5i$

2. $\dfrac{3+2i}{2-i} = \dfrac{(3+2i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \dfrac{6+3i+4i-2}{2^2+(-1)^2} =$

$$= \frac{4+7i}{5}$$

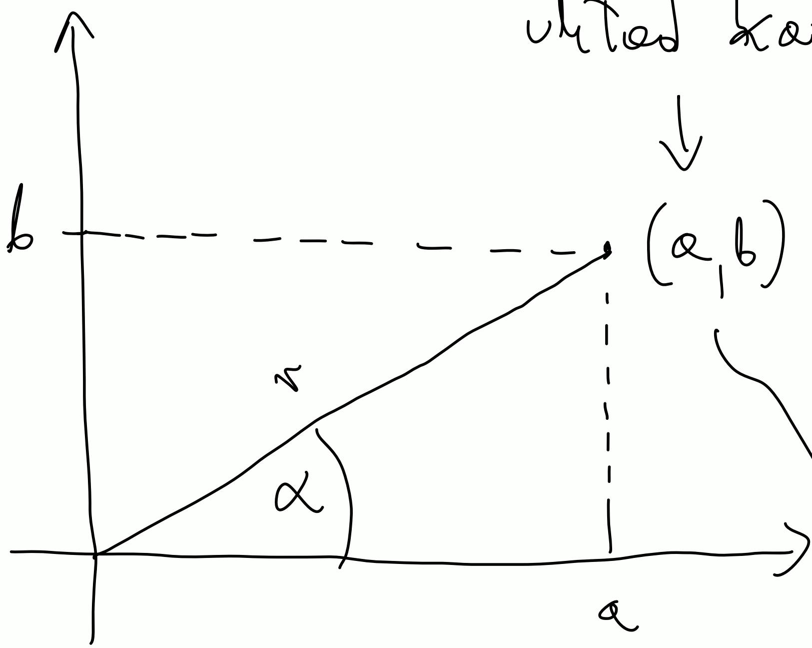
Postać algebraiczna

Zapis

$$z = a + bi$$

nazywamy **postacią algebraiczną** liczby z.

Postać trygonometryczna



układ kartezjański

$(a,b) = (r, \alpha)$

układ biegunowy

$r = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$

$$= a + bi \overset{r \neq 0}{=} r\left(\frac{a}{r} + \frac{b}{r} i\right) = r\left(\cos\alpha + i \sin\alpha\right)$$

$a + bi \;\wr\; (a,b)$

$\frac{a}{r} = \cos\alpha$

$\frac{b}{r} = \sin\alpha$

$r(\cos\alpha + i\sin\alpha) \;\wr\; (r, \alpha)$

Podstać trygonometryczna

Zapis

$$z = \overset{\overset{r}{\shortparallel}}{|z|}(\cos\alpha + i\sin\alpha).$$

nazywamy **postacią trygonometryczną** liczby z. $\neq 0$

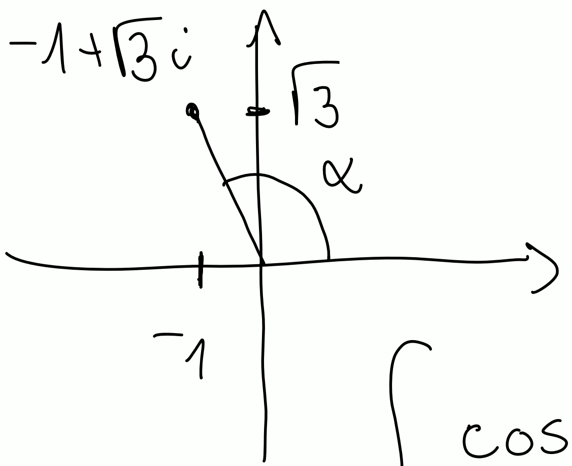
Liczbę α nazywamy **argumentem** liczby $z \neq 0$. Jeżeli $\alpha \in [0, 2\pi)$, to liczbę tę nazywamy **argumentem głównym**.

$\alpha = \arg(z)$

$\alpha = \operatorname{Arg}(z)$

Przykład

Zapisać liczbę $z = -1 + \sqrt{3}i$ w postaci trygonometrycznej.



$$|-1+\sqrt{3}i| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\begin{cases} \cos\alpha = \frac{a}{r} = \frac{-1}{2} \\ \sin\alpha = \frac{b}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\boxed{\alpha = \frac{2\pi}{3}}$$

$$\beta = \frac{\pi}{3} \quad \begin{cases} \cos\beta = \frac{1}{2} \\ \sin\beta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\alpha = \pi - \beta$$

$$\cos\alpha = \cos(\pi - \beta) = -\cos\beta = -\frac{1}{2}$$

$$\sin\alpha = \sin(\pi - \beta) = \sin\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$-1 + \sqrt{3}i = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

Twierdzenie

Niech

$$z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

oraz

$$w = |w|(\cos\beta + i\sin\beta).$$

Wtedy

$$zw = |z||w|(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)).$$

W szczególności

Wzór de Moivre'a - Laplace'a

$$z^n = |z|^n(\cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha)).$$

Przykład

Wyznaczyć
$$(1+i)^{100}.$$

$$|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\Longrightarrow \quad \alpha = \frac{\pi}{4}$$

$$(1+i)^{100} = \left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right)^{100} =$$
$$= \left(\sqrt{2}\right)^{100}\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\cdot 100\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot 100\right)\right) =$$
$$= 2^{50}\cdot\left(\cos(25\pi) + i\sin(25\pi)\right) = 2^{50}\Big(\underbrace{\cos\pi}_{=-1} + i\underbrace{\sin\pi}_{=0}\Big) = \boxed{-2^{50}}$$

Postać wykładnicza

$$\underline{\cos\alpha} + \underline{i\sin\alpha} = \boxed{e^{i\alpha}} = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i\alpha)^n}{n!}}$$

$$z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha) = \underline{|z|e^{i\alpha}}$$

$$zw = \left(|z|e^{i\alpha}\right)\left(|w|e^{i\beta}\right) = |z||w|e^{i(\alpha+\beta)}$$

$$z^n = \left(|z|e^{i\alpha}\right)^n = |z|^n e^{i\alpha n}$$

$$\underline{e^{i\pi}} + \underline{1} = \underline{0}$$

Przykład

Wyznaczyć wzory na $\cos(3\alpha)$, $\sin(3\alpha)$ oraz $\sin(\alpha + \beta)$.

Pierwiastek zespolony

$a \in \mathbb{R}$ $\quad a \geq 0$

$$\boxed{\sqrt[n]{a} = b \iff b^n = a}$$

$$\sqrt{4} = 2 \qquad 2^2 = 4 \qquad (-2)^2 = 4 \qquad 2, -2 \ ?$$

$$a \geq 0: \quad \sqrt[2n]{a} = b \iff b^{2n} = a \ \wedge \ \underline{b \geq 0}$$

$$a \in \mathbb{R} \quad \sqrt[2n+1]{a} = b \iff b^{2n+1} = a \qquad \cancel{b \geq 0}$$

$$\sqrt[n]{z} = \{ w \in \mathbb{C} : w^n = z \}$$

Pierwiastek zespolony

Niech $z \in \mathbb{C}$. **Pierwiastkiem zespolonym** stopnia $n \geqslant 2$ z liczby z nazywamy **zbiór**

$$\sqrt[n]{z} = \{w \in \mathbb{C} \colon w^n = z\}.$$

zawsze ma n elementów dla $z \neq 0$

$$\sqrt[5]{1+2i} = \{w \in \mathbb{C} \colon \underbrace{w^5}_{\substack{\parallel \\ (a+bi)^5}} = 1+2i\}$$

$\Rightarrow \ldots$ $a = \ldots$, $b = \ldots$

$$z^n = |z|^n(\cos(\alpha n) + i\sin(\alpha n))$$

Pierwiastek zespolony

Niech $z \in \mathbb{C}$. **Pierwiastkiem zespolonym** stopnia $n \geqslant 2$ z liczby z nazywamy **zbiór**

$$\sqrt[n]{z} = \{w \in \mathbb{C} \colon w^n = z\}.$$

Niech

$$z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha).$$

Wtedy

$$\sqrt[n]{z} = \{z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}\},$$

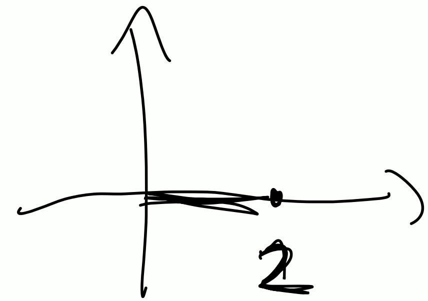
gdzie

$$z_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right)$$

dla $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Przykład

Wyznaczyć (zespolony) pierwiastek $\cancel{\sqrt[3]{1}}$. $\sqrt[3]{2}$



$$2 = 2(\cos 0 + i\sin 0)$$

$$\sqrt[3]{2} = \{z_0, z_1, z_2\}$$

$$z_0 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{0+2\pi\cdot 0}{3} + i\sin\frac{0+2\pi\cdot 0}{3}\right) = \sqrt[3]{2}$$

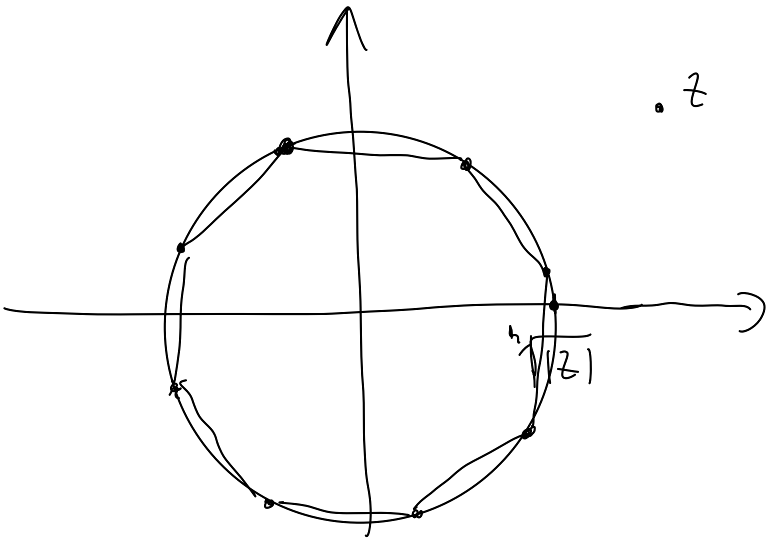
$$z_1 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{0+2\pi\cdot 1}{3} + i\sin\frac{0+2\pi\cdot 1}{3}\right) = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$= \sqrt[3]{2}\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

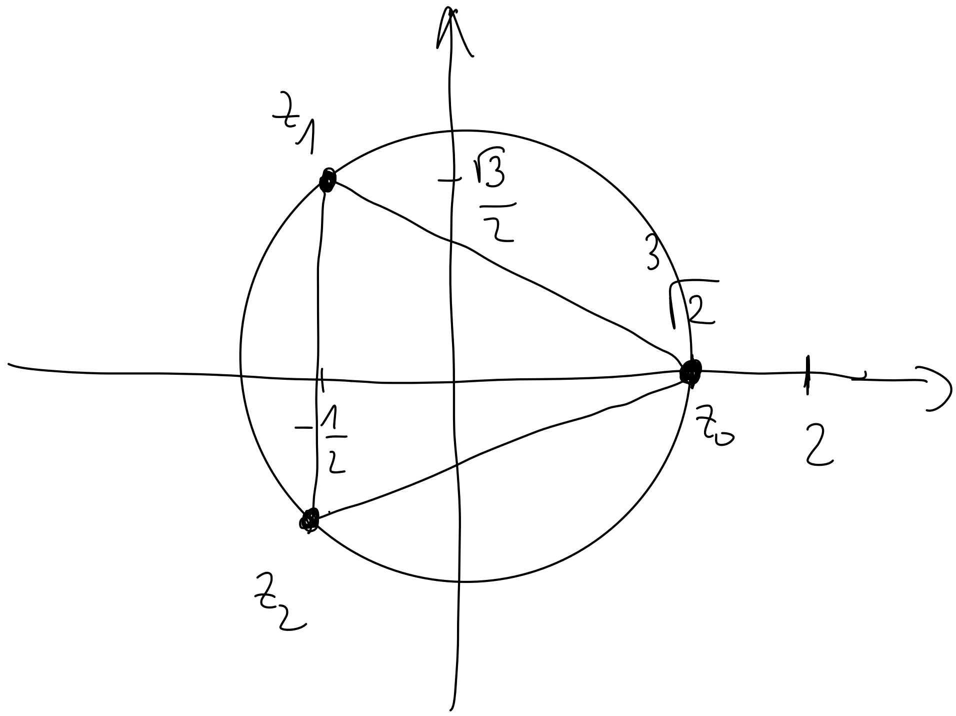
$$z_2 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{0+2\pi\cdot 2}{3} + i\sin\frac{0+2\pi\cdot 2}{3}\right) = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$$

$$= \sqrt[3]{2}\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$\sqrt[n]{z}$



$\sqrt[3]{\cancel{4}\,2}$



Zasadnicze twierdzenie algebry

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset ?$$

$x+1=0 \qquad 2x=3 \qquad x^2=2 \qquad x^2=-1$

?

$\mathbb{H}$

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

Zasadnicze twierdzenie algebry

Twierdzenie

Każdy wielomian stopnia $\geqslant 1$ *ma pierwiastek zespolony.*

Zasadnicze twierdzenie algebry

Twierdzenie

Każdy wielomian stopnia $\geqslant 1$ *ma pierwiastek zespolony.*

Twierdzenie

Każdy wielomian p *stopnia* $n \geqslant 1$ *ma dokładnie* n *pierwiastków zespolonych, to znaczy istnieją takie liczby zespolone* $z_1, z_2, \ldots, z_n$*, że*

$$p(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_n).$$