$v = \frac{s}{t}$

$\lim\limits_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} = v_{\text{chwilowe}}$

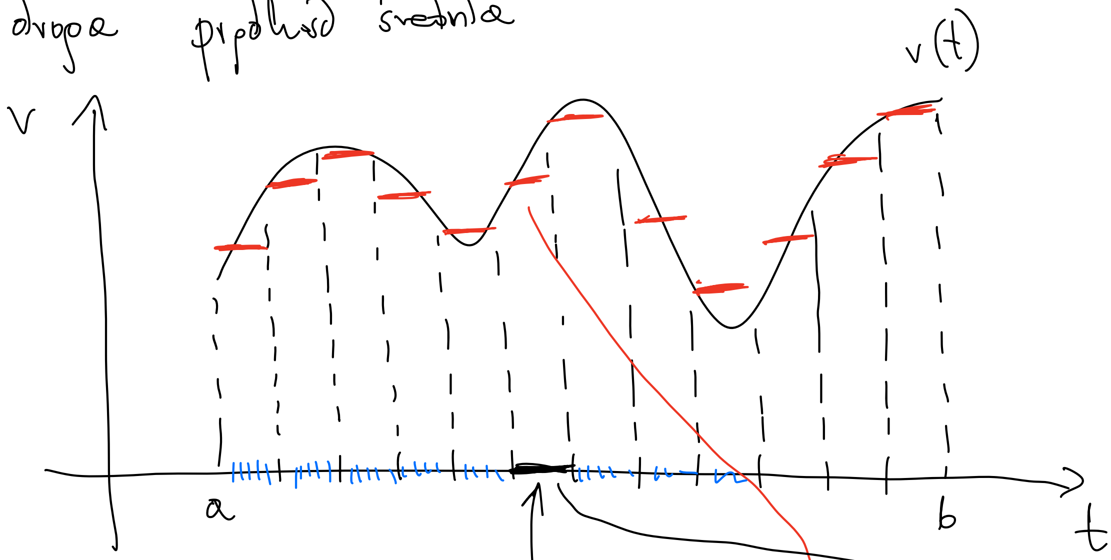
---

$s = \underbrace{v \cdot t}$

droga

prędkość średnia

łączny czas

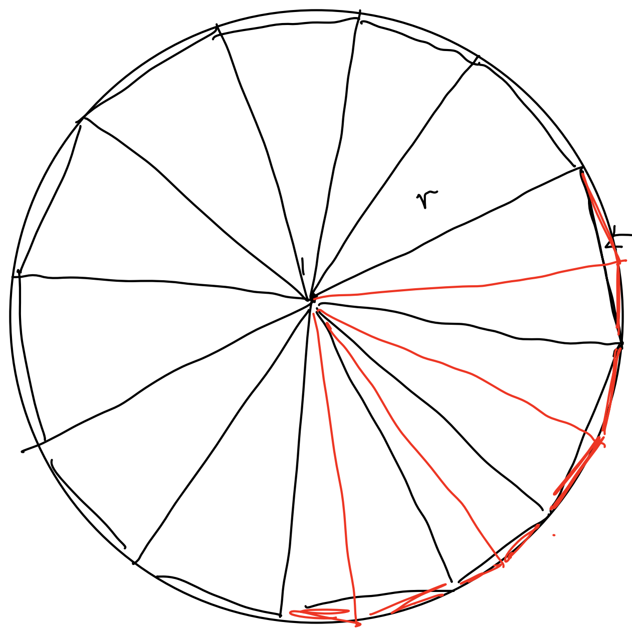



$s = ?$

$s$ „średnie" na małym odcinku = prędkość stała · przyrost czasu

$s$ „średnie" na $[a, b]$ $= \sum$ $s$ „średnie" na małym odcinku

$\lim\limits_{\text{długość odcinka czasu} \to 0} s$ „średnie"

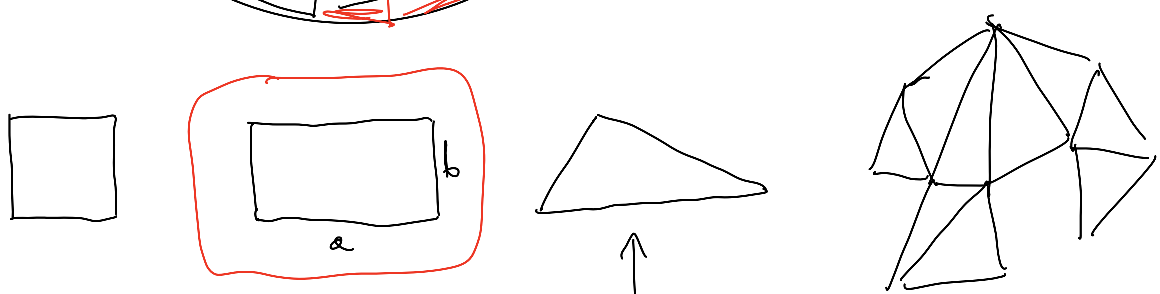



Pole koła ?

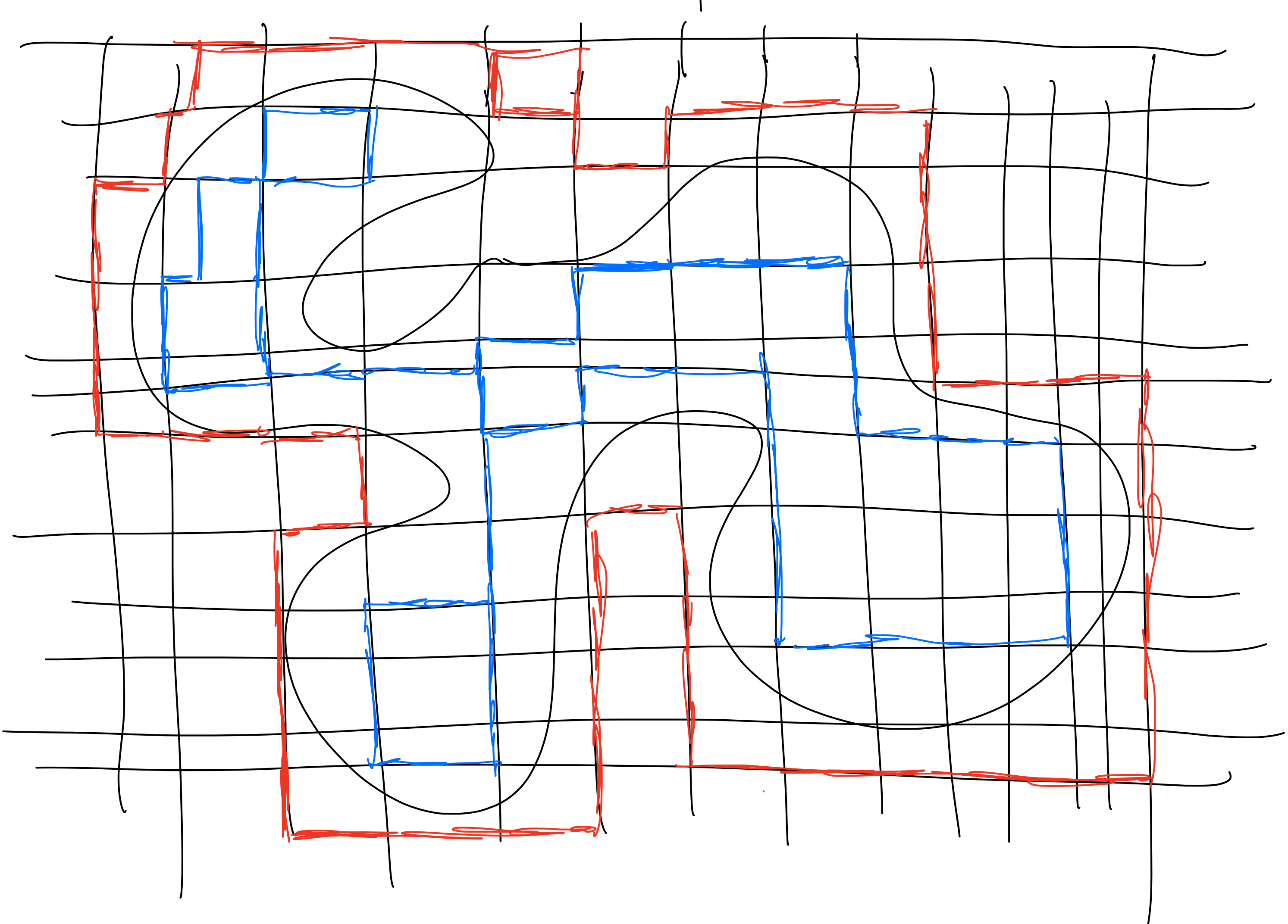
$\pi r^2$

„małe”

Pole koła $\approx$ suma pól $\triangle$

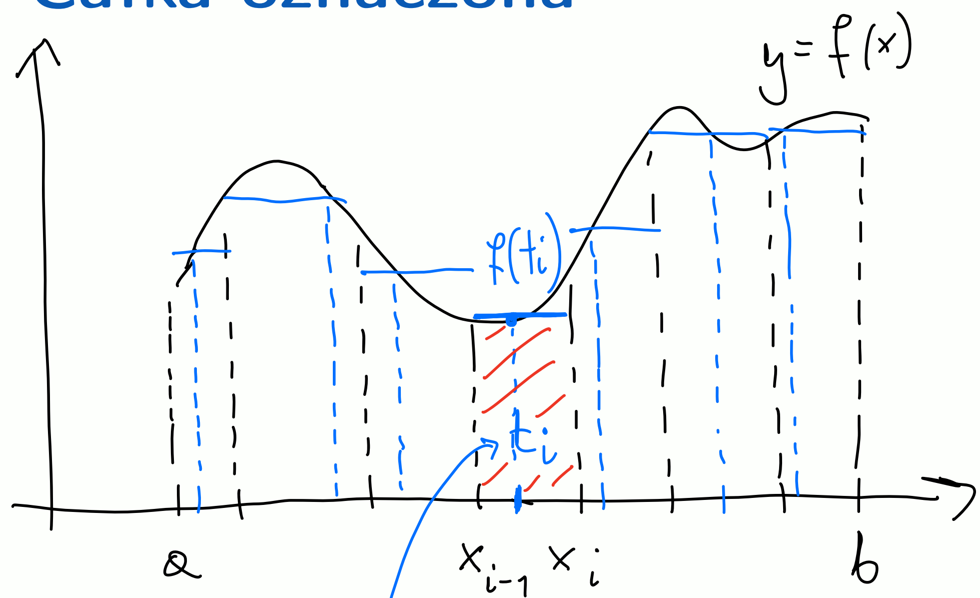



$P = ab$



# Całka oznaczona

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$




$$P_{\square} = \overbrace{(x_i - x_{i-1})}^{\Delta x_i} \cdot f(t_i)$$

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b$$

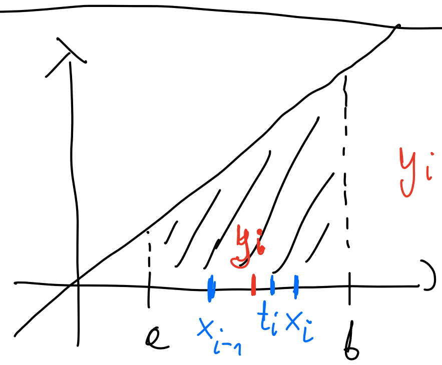
punkt pośredni

$$S(f, \{x_i\}, \{t_i\}) = \sum_{i=1}^{n} P_{\square} = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\, \Delta x_i$$ ← suma całkowa

średnica podziału $\delta = \max\limits_{i=1,\dots,n} \Delta x_i$

$$\underbrace{\lim_{\delta\to 0} S\left(f,\{x_i\},\{t_i\}\right)}_{\text{granica przy dowolnym podziale i dowolnym wyborze punktów pośrednich}} \underset{\text{jeśli istnieje}}{=} \boxed{\int_a^b f(x)\,dx}$$

$f(x) = x$ , $f:[a,b]\to\mathbb{R}$




$$y_i = \frac{x_{i-1}+x_i}{2}$$

$$S\left(f,\{x_i\},\{t_i\}\right) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\cdot\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} t_i\cdot(x_i - x_{i-1}) =$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{n} y_i\,(x_i - x_{i-1})}_{S_1} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} (t_i - y_i)(x_i - x_{i-1})}_{S_2}$$

$$S_1 = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_{i-1}+x_i}{2}\cdot(x_i - x_{i-1}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2 - x_{i-1}^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\cancel{x_1^2} - x_0^2\right) + \left(\cancel{x_2^2} - \cancel{x_1^2}\right) + \left(\cancel{x_3^2} - \cancel{x_2^2}\right) + \dots + \left(x_n^2 - \cancel{x_{n-1}^2}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x_n^2 - x_0^2\right) = \frac{1}{2}\left(b^2 - a^2\right) \qquad \leqslant \delta$$

$$|S_2| = \left|\sum_{i=1}^{n}(t_i - y_i)(x_i - x_{i-1})\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |t_i - y_i|\cdot(x_i - x_{i-1}) \leqslant$$

$x_{i-1}$ $y_i$ $t_i$ $x_i$

$$\leqslant \delta \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) = \delta(b-a)$$

$$\lim_{\delta \to 0} S_2 = 0$$

$$\lim_{\delta \to 0} S(f, \{x_i\}, \{t_i\}) = \lim_{\delta \to 0} (S_1 + S_2) = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$$

$$\Longrightarrow \boxed{\int_a^b x\,dx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)}$$

Funkcja $F$ jest **funkcją pierwotną** funkcji $f$ na przedziale $I$, jeżeli

$$F'(x) = f(x)$$

dla każdego $x \in I$.

$(\sin x)' = \cos x$ $\quad$ $f(\cancel{x}) = \cos x$ $\quad$ $F(x) = \sin x$

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$ $\quad$ $f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad$ $F(x) = \ln x$

$(x^a)' = ax^{a-1}$ $\quad$ $f(x) = x^a$ $\quad$ $F(x) = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C$

# Charakteryzacja funkcji pierwotnych

Jeśli $F$ jest funkcją pierwotną funkcji $f$ na przedziale $I$, to

$\rightsquigarrow$ $G = F + C$ jest funkcją pierwotną $f$ dla dowolnej stałej $C$,

$\rightsquigarrow$ każda funkcja pierwotna funkcji $f$ jest postaci $F + C$.

$F' = f$, $G' = f$

$(F-G)' = F' - G' = f - f = 0$

$\Rightarrow$ $F-G$ jest funkcją stałą

$F - G = C$

$\underline{F = G + C}$.

# Całka nieoznaczona

**Całką nieoznaczoną** funkcji $f$ na przedziale $I$ nazywamy zbiór funkcji

$$\{F + C \colon C \in \mathbb{R}\},$$

gdzie $F$ jest dowolną funkcją pierwotną funkcji $f$.

Zbiór ten oznaczamy

$$\int f(x)\,dx.$$

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

$$\boxed{\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, \quad C \in \mathbb{R}}$$

# Własności

- $\rightsquigarrow \quad \left[\int f(x)dx\right]' = f(x),$
- $\rightsquigarrow \quad \int f'(x)dx = f(x) + C.$

$$\begin{tikzcd} f \arrow[r, bend left, "(\ )'"] & f' \arrow[l, bend left, "\int \ dx"] \end{tikzcd}$$

# Istnienie całki nieoznaczonej

**Twierdzenie**

Każda funkcja ciągła na przedziale $I$ ma na tym przedziale funkcję pierwotną.

## Całki nieoznaczone ważniejszych funkcji elementarnych

- $\int 0 \, dx = C, \quad x \in \mathbb{R}$

$a = -1$

$\int \frac{1}{x} \, dx$

- $\int x^a \, dx = \frac{1}{a+1} x^{a+1} + C, \quad a \neq -1,$
- $\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C, \quad x \in (-\infty, 0)$ lub $x \in (0, \infty)$
- $\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0, \; a \neq 1, \; x \in \mathbb{R}$
- $\int e^x \, dx = e^x + C, \quad x \in \mathbb{R}$

$\rightsquigarrow$ $$\int \sin x \, dx = -\cos x + C, \quad x \in \mathbb{R}$$

$\rightsquigarrow$ $$\int \cos x \, dx = \sin x + C, \quad x \in \mathbb{R}$$

$\rightsquigarrow$ $$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \quad x \in \big(k\pi, (k+1)\pi\big), \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$\rightsquigarrow$ $$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right), \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$\rightsquigarrow \quad \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x + C, \quad x \in \mathbb{R}$

$\rightsquigarrow \quad \int \frac{-1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arcctg} x + C, \quad x \in \mathbb{R}$

$\rightsquigarrow \quad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C, \quad x \in (-1,1)$

$\rightsquigarrow \quad \int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arccos x + C, \quad x \in (-1,1)$

$$\int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \int \underbrace{\frac{1}{\sin x}\cdot \boxed{\cos x}}\,dx = \ln|\sin x| + C$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\big(\ln(\sin x)\big)' = \frac{1}{\sin x}\cdot(\sin x)' = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|\sin x| + C$$

# Przydatne wzory

- $\displaystyle\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$ dla $a \neq 0$ i $b \in \mathbb{R}$,
- $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C,$
- $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f^2(x)}\,dx = -\frac{1}{f(x)} + C,$
- $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}\,dx = 2\sqrt{f(x)} + C.$

$$\int x^3\,dx = \frac{1}{4}x^4 + C \Rightarrow \int (5x-3)^3\,dx = \frac{1}{4}(5x-3)^4\,\frac{1}{5} + C$$

## Twierdzenie o liniowości całki nieoznaczonej

Jeśli funkcje $f$ i $g$ mają funkcje pierwotne, to

1. $\displaystyle\int (f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx,$
2. $\displaystyle\int cf(x)dx = c\int f(x)dx$, gdzie $c \in \mathbb{R}$.

„3" $\cancel{\int f \cdot g = \ldots}$

## Twierdzenie o całkowaniu przez części

Jeżeli funkcje $f$ i $g$ mają ciągłe pochodne, to

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx.$$

$$(f\cdot g)' = f'g + f\cdot g' \quad \Big| \int$$

$$f\cdot g = \int f'g + \int f\cdot g'$$

$$\underline{\int f\cdot g'} = f\cdot g - \underline{\int f'\cdot g}$$

$$\int x e^x\,dx = \int \underbrace{x}_{f}\cdot\underbrace{(e^x)'}_{g'}\,dx = xe^x - \int (x)' e^x\,dx =$$

$$= xe^x - \int e^x\,dx = \underline{xe^x - e^x + C}$$

$$\int x \sin x\,dx = \int x\underline{(-\cos x)}'\,dx = -x\cos x - \int (x)'(-\cos x)\,dx$$

$$= -x\cos x + \int \cos x\,dx =$$

$$= \underline{-x\cos x + \sin x + C}$$

---

$$\int x^2 e^x\,dx, \quad \int x^3 \sin x, \quad \ldots$$

---

$$\int \ln x\,dx = \int 1\cdot\ln x\,dx = \int \ln x\,(x)'\,dx =$$

$$= x\ln x - \int (\ln x)'\cdot x\,dx =$$

$$= x\ln x - \int \frac{1}{x}\cdot x\,dx =$$

$$= x\ln x - \int 1\,dx =$$

$$= \underline{x\ln x - x + C}$$

$$\boxed{\int \underset{\overset{\shortparallel}{x^0}}{1}\,dx = x + C}$$

# Przykład

# Twierdzenie o całkowaniu przez podstawienie

Jeżeli

1. funkcja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ jest ciągła na przedziale $(a, b)$,
2. funkcja $g : (\alpha, \beta) \to (a, b)$ ma ciągłą pochodną na przedziale $(\alpha, \beta)$,

to

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C,$$

gdzie $F$ jest dowolną funkcją pierwotną funkcji $f$ oraz $C \in \mathbb{R}$.

$$\int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \left| \begin{array}{l} \boxed{t = \sin x} \;\Big|\; (\;)' \\ 1 dt = \cos x \, dx \end{array} \right| = \int \frac{1}{t} dt =$$

$$= \ln|t| + C = \ln|\sin x| + C$$

# Przykład

$$\int \frac{x}{1+x^4}\,dx = \left| \begin{array}{l} t = x^4 \quad |()' \\ 1\,dt = 4x^3\,dx \end{array} \right|$$

$$\int \frac{\sqrt[4]{t}}{1+t}\,dx = \int \frac{\sqrt[4]{t}}{1+t} \cdot \frac{1}{4\sqrt[4]{t^3}}\,dt$$

$$dx = \frac{dt}{4x^3} = \frac{dt}{4\sqrt[4]{t^3}} \qquad \ldots \quad ?$$

$$= \left| \begin{array}{l} t = x^2 \\ dt = 2x\,dx \\ \frac{1}{2}dt = x\,dx \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{arctg} t + C =$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x^2) + C$$

# Całkowanie funkcji wymiernych

$$w(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

## Całkowanie ułamków prostych pierwszego rodzaju

$$\int \frac{A}{x+a} dx$$

$$\int \frac{A}{(x+a)^n} dx$$

# Całkowanie ułamków prostych drugiego rodzaju

# Całkowanie ułamków prostych drugiego rodzaju

# Całkowanie funkcji wymiernych

# Przykład

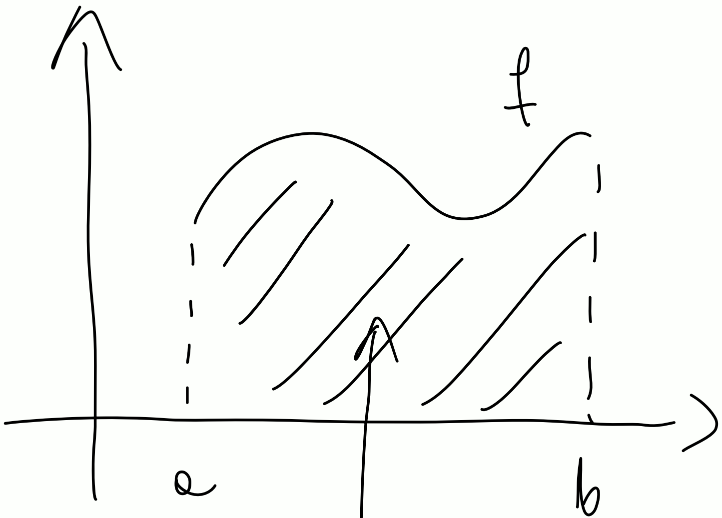
# Uniwersalne podstawienie trygonometryczne

- Jeżeli $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, to

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad dx = \frac{2}{1+t^2} dt.$$

# Całki z funkcji niewymiernych

# Całka oznaczona




$$\text{Pole} = \boxed{\int_a^b f(x)\,dx}$$

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

# Całka oznaczona

# Wzór Newtona-Leibniza

## Twierdzenie

Jeżeli $F$ jest funkcją pierwotną funkcji $f$ na przedziale $\langle a, b\rangle$, to

$$\underbrace{\int_a^b f(x)\,dx}_{} = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

$$\boxed{\int_a^b x\,dx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)}$$

$$\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + C$$

$$\int_a^b x\,dx = \frac{1}{2}x^2\Big|_a^b = \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}a^2$$

# Przykład

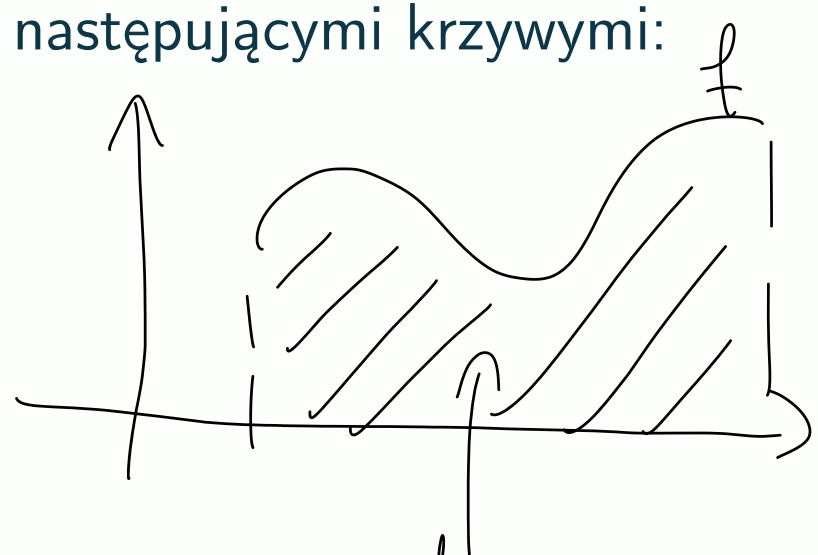
# Interpretacja geometryczna

Jeżeli funkcja $f$ jest nieujemna na przedziale $\langle a, b \rangle$, to całka oznaczona

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

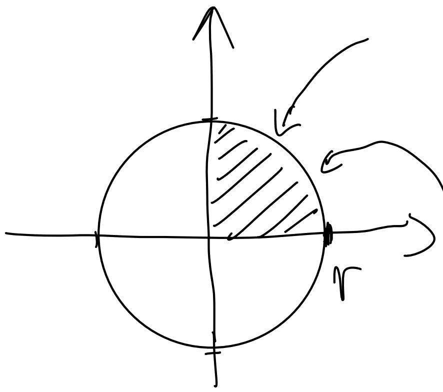
jest **polem** obszaru ograniczonego następującymi krzywymi:

- osią $Ox$,
- wykresem funkcji $f$,
- prostą $x = a$,
- prostą $x = b$.




$$\int_a^b f(x)\, dx$$

# Pole koła



$f: [0, r] \to \mathbb{R}$

$x^2 + y^2 = r^2$

$y^2 = r^2 - x^2$

$|y| = \sqrt{r^2 - x^2}$

$y = \sqrt{r^2 - x^2}$

$P = \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\, dx \qquad 0 \leqslant x \leqslant r$

$$\int \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \left| \begin{array}{ll} x = r\sin t & t = \arcsin\frac{x}{r} \\ dx = r\cos t\, dt & \end{array} \right|$$

$$= \int \sqrt{r^2 - r^2\sin^2 t}\; r\cos t\, dt = r^2 \int \sqrt{1 - \sin^2 t}\, \cos t\, dt =$$

$$= r^2 \int \sqrt{\cos^2 t}\, \cos t\, dt \underset{\cos t \geqslant 0}{=} r^2 \int \cos t \cdot \cos t\, dt =$$

$$\boxed{\int \cos x\, dx = \sin x + C}$$

$$= r^2 \int \cos^2 t\, dt = r^2 \int \frac{1 + \cos(2t)}{2}\, dt =$$

$$= \frac{r^2}{2} \int (1 + \cos(2t))\, dt = \frac{r^2}{2}\left[\int 1\, dt + \int \cos(2t)\, dt\right] =$$

$$= \frac{r^2}{2}\left[t + \frac{1}{2}\sin(2t)\right] + C = \frac{r^2}{2}\left[\arcsin\frac{x}{r} + \frac{1}{2}\sin\left(2\arcsin\frac{x}{r}\right)\right]$$

$$\int \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \underbrace{\frac{r^2}{2}\left[\arcsin\frac{x}{r} + \frac{1}{2}\sin\left(2\arcsin\frac{x}{r}\right)\right]}_{F(x)} + C$$

$$\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = F(r) - F(0) =$$

$$= \frac{r^2}{2}\left[\overset{\frac{\pi}{2}}{\overset{\|}{\arcsin 1}} + \frac{1}{2}\sin\left(2\arcsin 1\right)\right] +$$

$$- \frac{r^2}{2}\left[\overset{0}{\overset{\|}{\arcsin 0}} + \frac{1}{2}\sin\left(2\arcsin 0\right)\right] =$$

$$= \frac{r^2}{2}\left[\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\overset{0}{\overset{\|}{\sin(\pi)}}\right] +$$

$$- \frac{r^2}{2}\left[0 + \frac{1}{2}\sin(0)\right] =$$

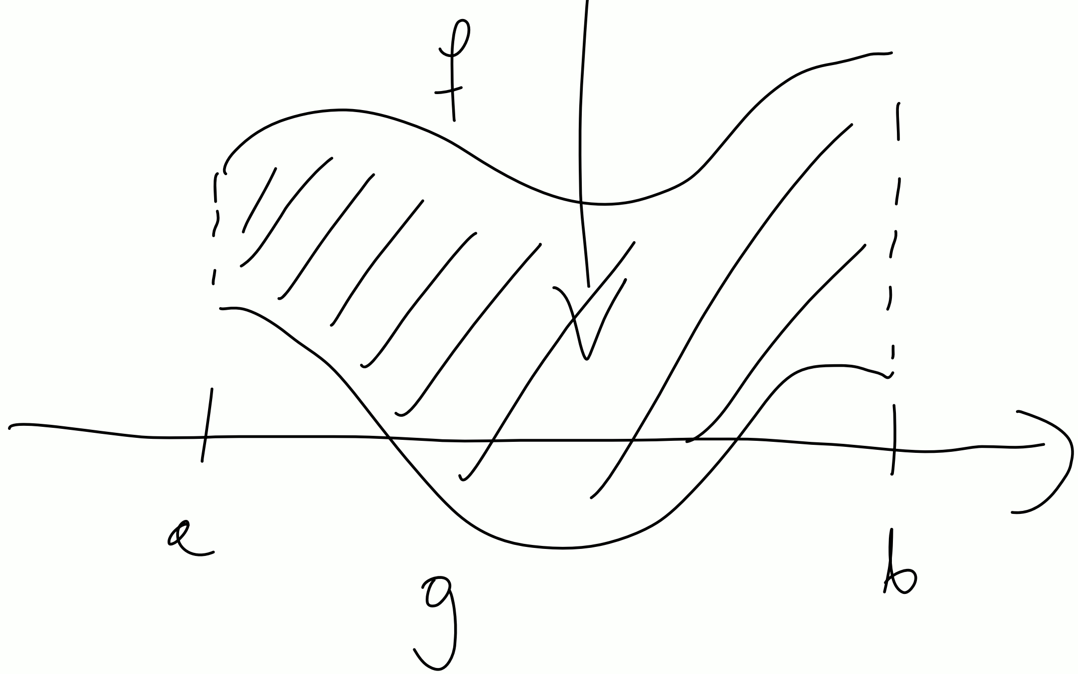
$$= \frac{r^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \underline{\frac{1}{4}\pi r^2} = P$$

$$P = 4 \cdot P = \boxed{\pi r^2}$$

## Uwaga

Jeżeli $f(x) \geqslant g(x)$ dla $x \in \langle a, b \rangle$, to pole obszaru zawartego między wykresami funkcji $f$ i $g$ na przedziale $\langle a, b \rangle$ jest równe

$$\int_a^b (f(x) - g(x))\,dx.$$



# Własności całki oznaczonej

- $\rightsquigarrow$ $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0,$
- $\rightsquigarrow$ $\displaystyle\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx,$
- $\rightsquigarrow$ $\displaystyle\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$ dla dowolnego $c \neq 0,$
- $\rightsquigarrow$ $\displaystyle\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx,$
- $\rightsquigarrow$ $\displaystyle\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$ dla $b \in \langle a, c\rangle.$

# Całkowanie przez części

Jeżeli funkcje $f$, $g$ są różniczkowalne na przedziale $\langle a, b\rangle$, to

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx.$$

# Całkowanie przez podstawienie

Załóżmy, że funkcja $f$ jest określona na przedziale $\langle a, b\rangle$, a funkcja $\phi\colon \langle\alpha, \beta\rangle \to \langle a, b\rangle$ ma ciągłą pochodną oraz spełnia warunki

- $\phi(\alpha) = a$,
- $\phi(\beta) = b$.

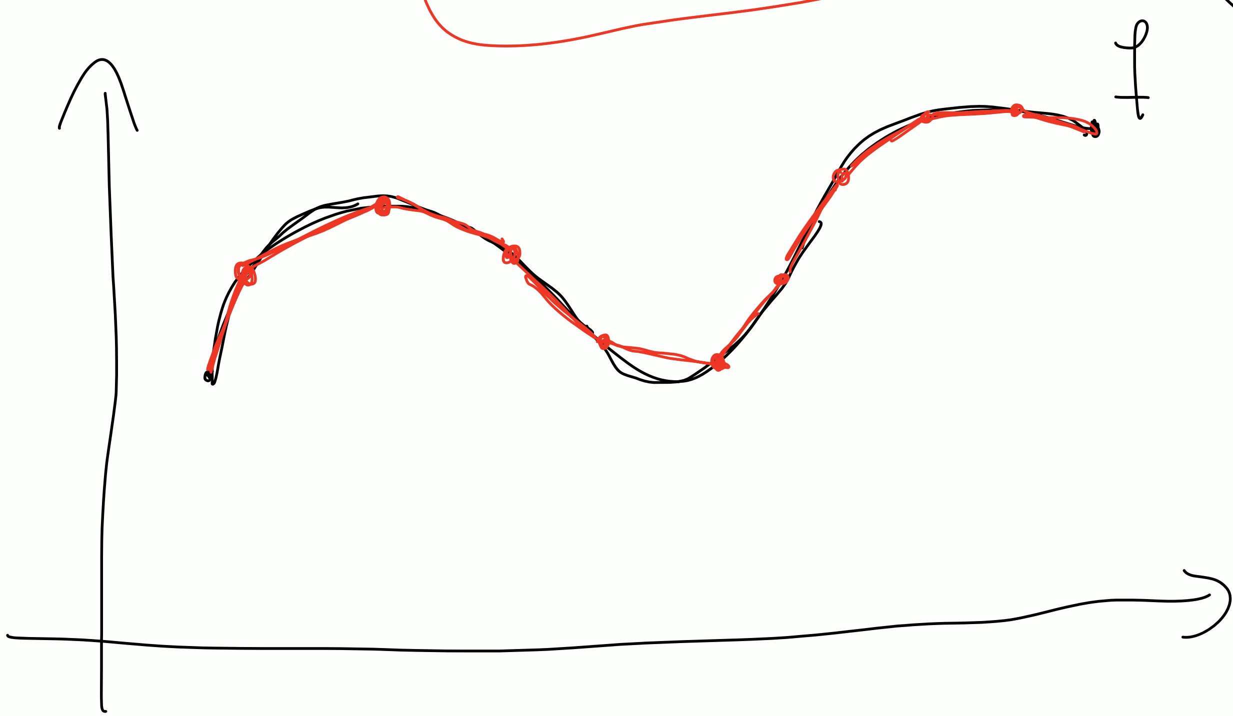
Wtedy

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\phi(x))\phi'(x)\,dx.$$

# Zastosowania

Załóżmy, że funkcja $f$ ma ciągłą pochodną na przedziale $\langle a, b \rangle$.
**Długość krzywej** $y = f(x)$ dla $x \in \langle a, b \rangle$ jest równa

$$\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$




wzór na obwód koła

# Zastosowania

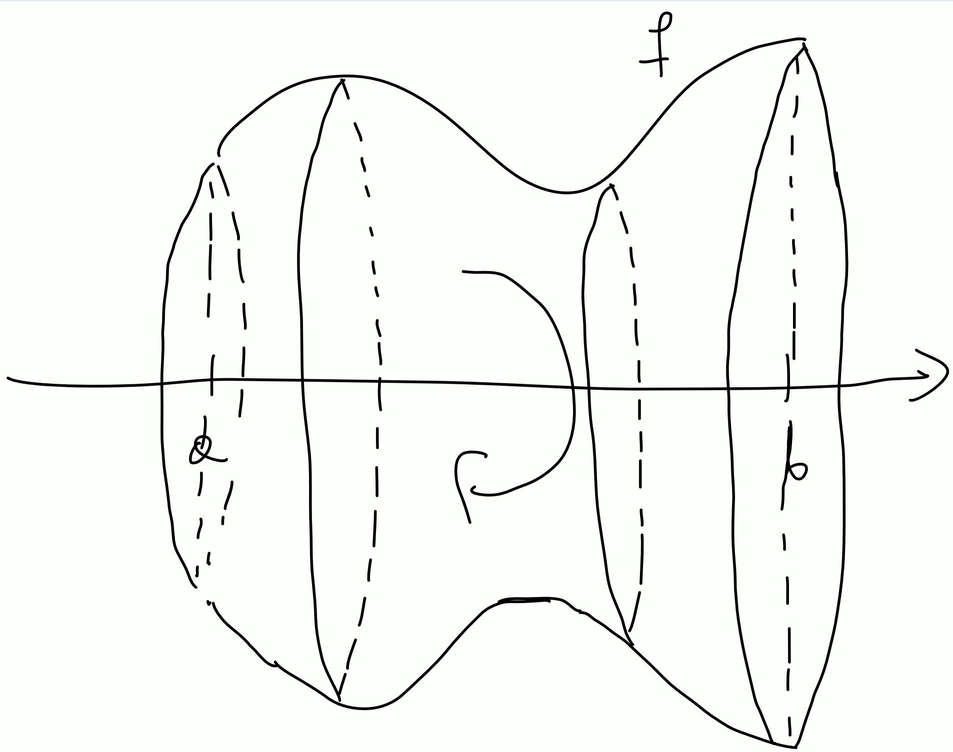
**Pole powierzchni** bryły powstałej przez obrót krzywej

$$y = f(x), \qquad x \in \langle a, b \rangle$$

wokół osi $Ox$ jest równe

$$|P| = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$

pole kuli



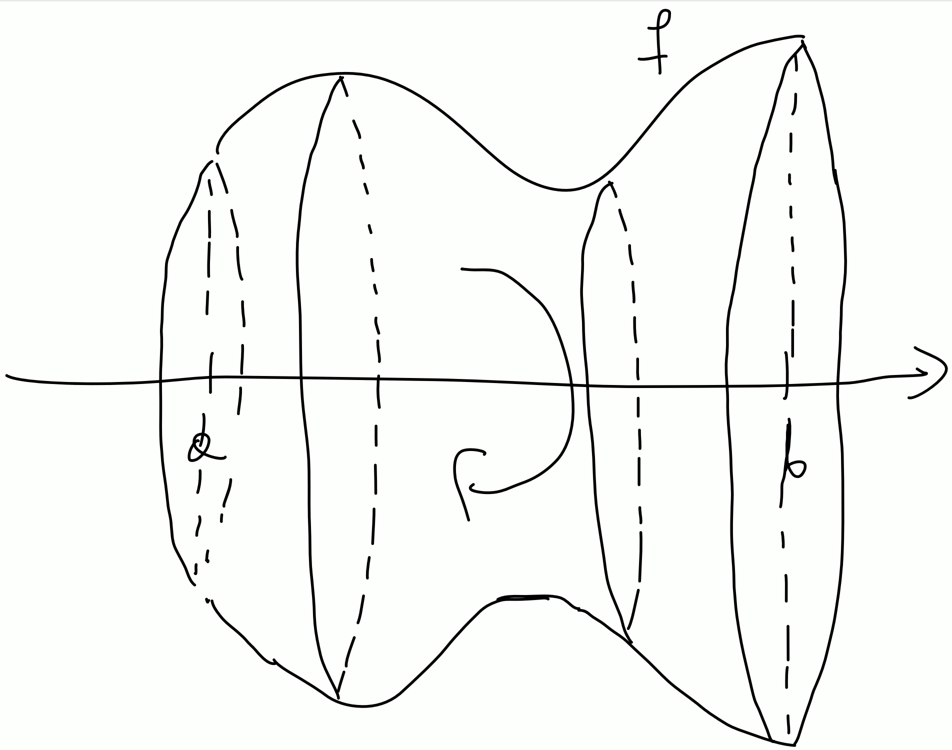
# Zastosowania

**Objętość** bryły powstałej przez obrót obszaru „pod krzywą”

$$y = f(x), \qquad x \in \langle a, b \rangle$$

wokół osi $Ox$ jest równa

$$|V_x| = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx.$$




objętość
kuli

# Zastosowania

**Objętość** bryły powstałej przez obrót obszaru „pod krzywą”

$$y = f(x), \qquad x \in \langle a, b \rangle$$

wokół osi $Oy$ jest równa

$$|V_y| = 2\pi \int_a^b x f(x)\, dx.$$