Rachunek różniczkowy

Prędkość?

dł. drogi

$$v_{śr} = \frac{s}{t} \quad \longleftarrow \quad \text{prędkość średnia}$$

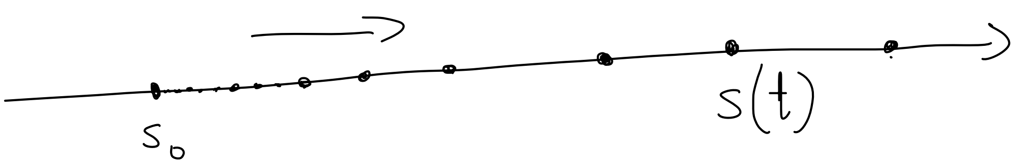
prędkość

czas

$v_{chwilowa} = ?$

$$v_{śr.\ od\ s_0\ do\ s} = \frac{s - s_0}{t - t_0}$$

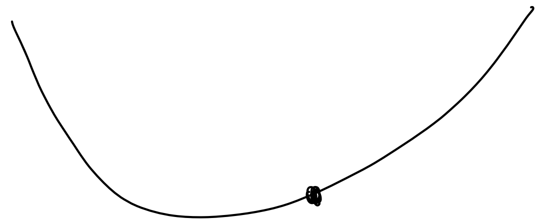
$v_{chwilowa\ w\ czasie\ t_0}$

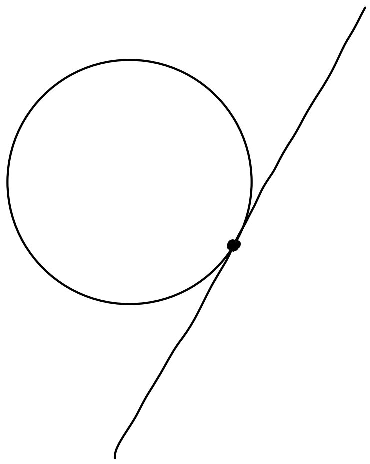


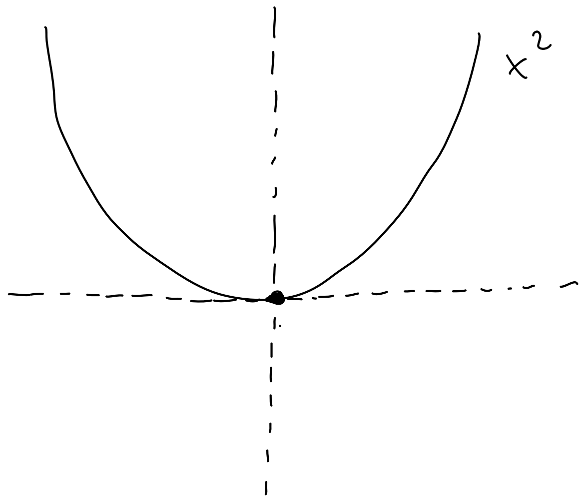
$$v_{śr.\ od\ s_0\ do\ s(t)}(t) = \frac{s(t) - s_0}{t - t_0}$$

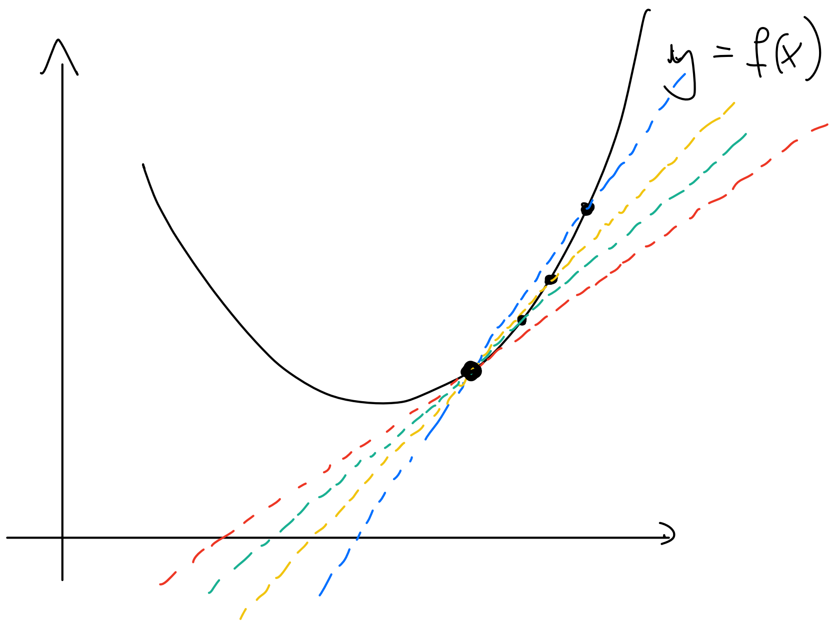
$$v_{chwilowa\ w\ t_0} \overset{def.}{=} \lim_{t \to t_0} v_{śr.\ od\ s_0\ do\ s(t)} = \underline{\lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - \overset{s(t_0)}{\overset{\parallel}{s_0}}}{t - t_0}}$$

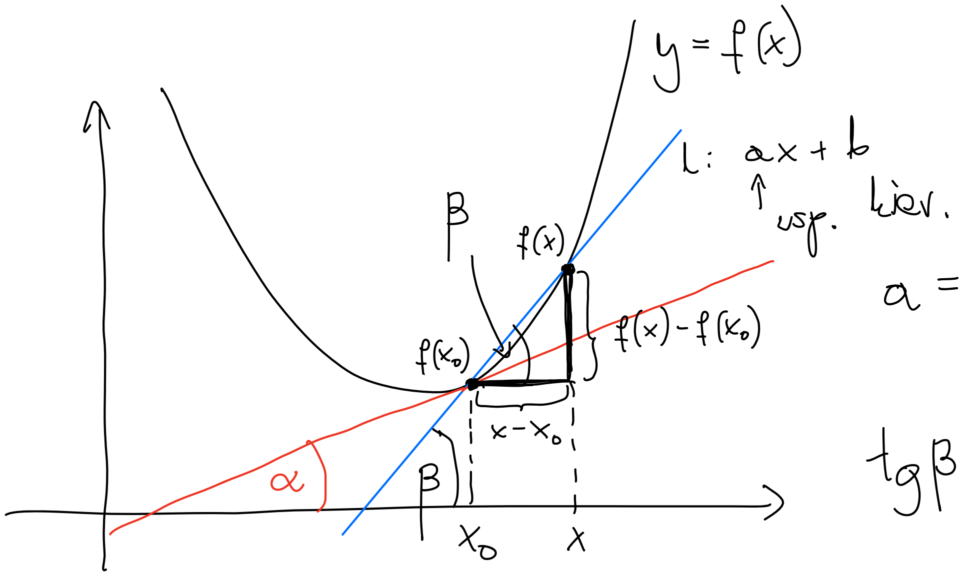
Styczna ?











$$a = \operatorname{tg} \beta$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$\alpha \overset{def}{=} \lim_{x \to x_0} \beta(x)$$

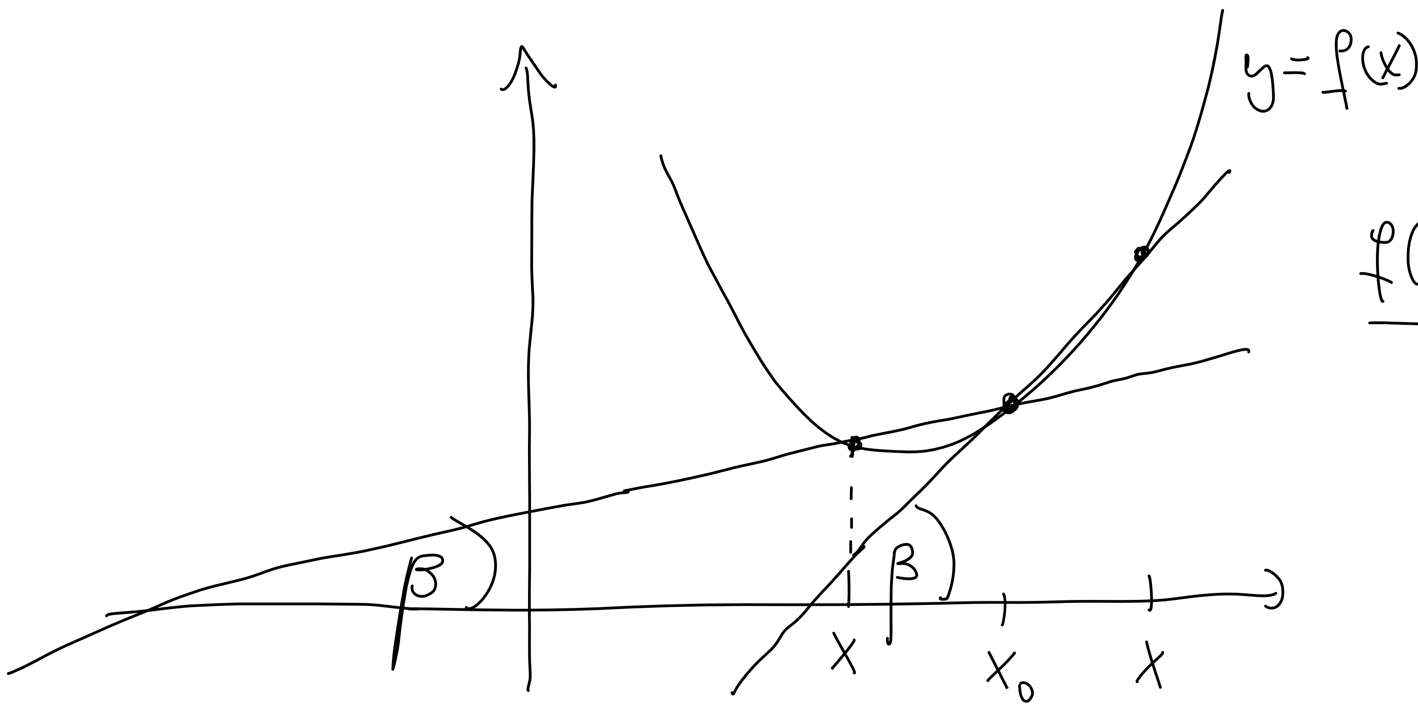
$$\operatorname{tg} \alpha \overset{def.}{=} \lim_{x \to x_0} \operatorname{tg} \beta(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Iloraz różnicowy

Niech $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ oraz $x, x_0 \in (a,b)$, $x \neq x_0$. Liczbę

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

nazywamy **ilorazem różnicowym** funkcji f w punkcie x_0 dla przyrostu $x - x_0$.



$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \operatorname{tg}\beta$$

Pochodna funkcji

Niech $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ oraz $x_0 \in (a,b)$. Jeżeli istnieje (właściwa) granica

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{\underbrace{x-x_0}_{h=x-x_0}}, = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

to nazywamy ją **pochodną funkcji** f w punkcie x_0 i oznaczamy

$$f'(x_0).$$

Mówimy wtedy, że funkcja f jest **różniczkowalna** w punkcie x_0.

$$\boxed{f'(x_0)} \qquad \frac{df}{dx}(x_0) \qquad \dot{f}(x_0) \qquad Df(x_0)$$

Przykład.

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f(x) = x^2 , \qquad x_0 \in \mathbb{R}$

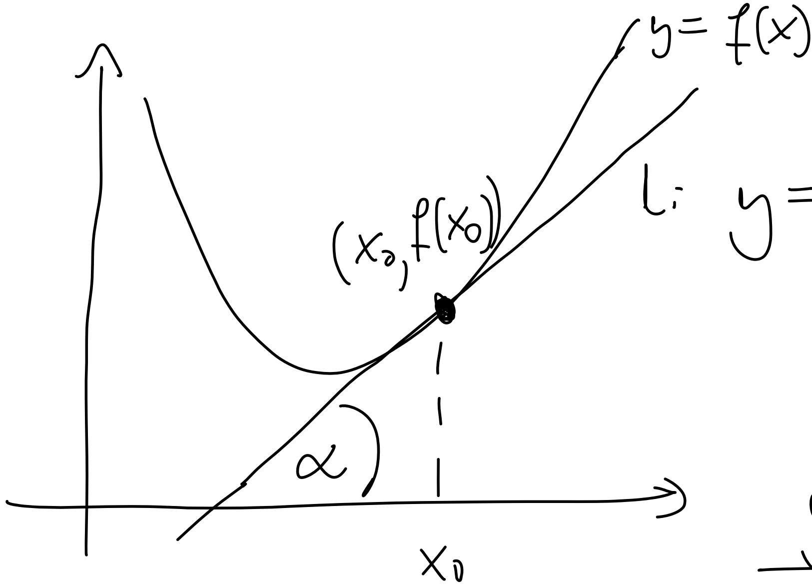
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to x_0} \frac{\cancel{(x - x_0)}(x + x_0)}{\cancel{x - x_0}}$$

$$= 2x_0$$

$$f'(x_0) = 2x_0 \quad \rightsquigarrow \quad (x^2)' = 2x$$

Styczna

Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x_0, to **styczną** do wykresu funkcji f w punkcie x_0 nazywamy prostą przechodzącą przez $f(x_0)$ o współczynniku kierunkowym równym $f'(x_0)$.



$l: \; y = ax + b$

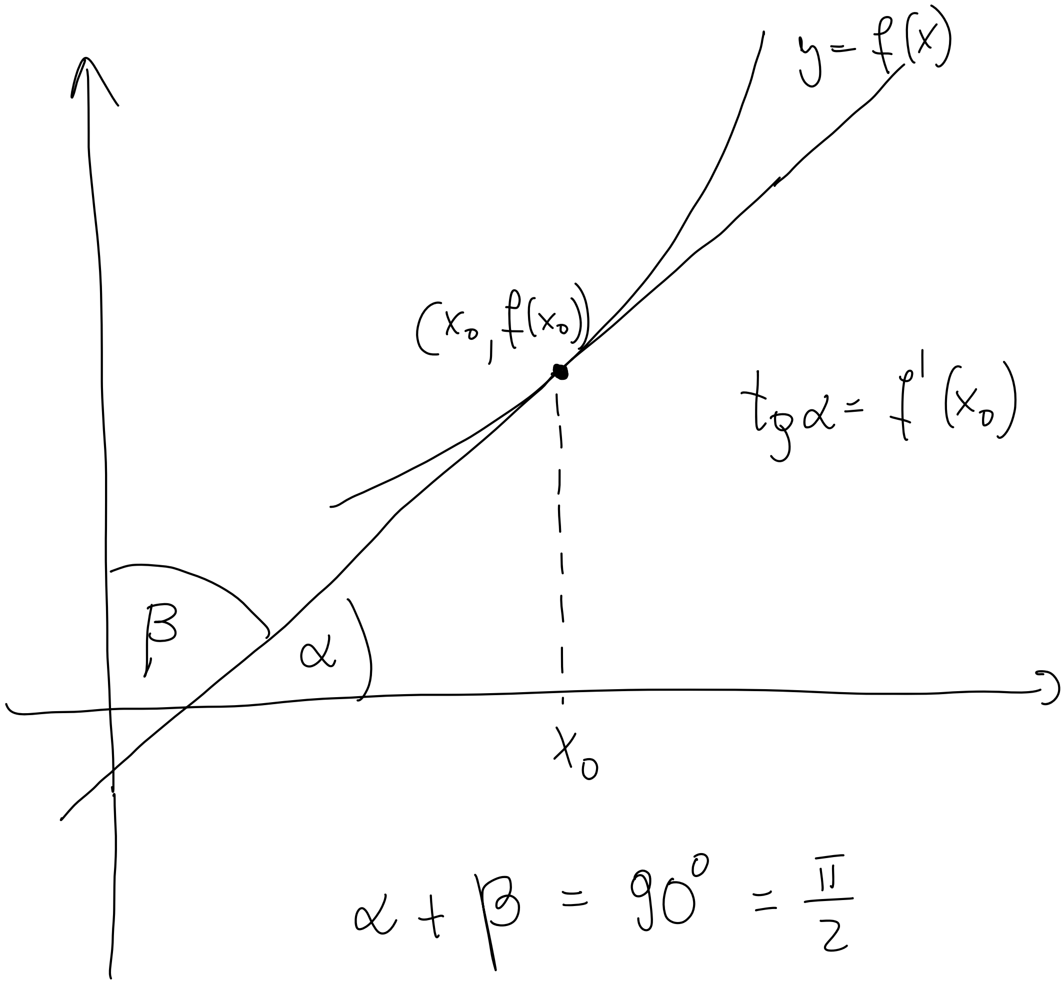
$a = f'(x_0)$ $\qquad b = ?$

$$y = f'(x_0)x + b$$

$$f(x_0) = f'(x_0)x_0 + b$$

$$b = -f'(x_0)x_0 + f(x_0)$$

$$y = f'(x_0)x - f'(x_0)x_0 + f(x_0) = \boxed{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}$$



$$\alpha + \beta = 90^0 = \frac{\pi}{2}$$

$$(f^{-1})'\left(f(x_0)\right) = \operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

Pochodna funkcji odwrotnej

Twierdzenie

Jeżeli funkcja f określona w przedziale (a, b) jest ciągła i ściśle monotoniczna oraz $f'(x_0) \neq 0$, to funkcja odwrotna f^{-1} jest różniczkowalna w punkcie $y_0 = f(x_0)$ oraz

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Pochodne funkcji elementarnych

- $(c)' = 0$
- $(x^a)' = ax^{a-1}$ $a \in \mathbb{R}$
- $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
- $(\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2}$
- $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$
- $(a^x)' = a^x \ln a$
- $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
- $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$
- $(\sin x)' = \cos x$
- $(\cos x)' = -\sin x$
- $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
- $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
- $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\operatorname{arc\,tg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$
- $(\operatorname{arc\,ctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Algebraiczne własności pochodnej

Twierdzenie

Jeżeli funkcje f i g są różniczkowalne w punkcie x_0, to

- $\rightsquigarrow$ $(c \cdot f)'(x_0) = c \cdot f'(x_0)$ dla dowolnego $c \in \mathbb{R}$,
- $\rightsquigarrow$ $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$,
- $\rightsquigarrow$ $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$,
- $\rightsquigarrow$ $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$.

$$(c \cdot f)' = c f'$$

$$(f + g)' = f' + g'$$

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

Przykład.

$$(\cos x \cdot \ln x)' = (\cos x)' \cdot \ln x + \cos x \cdot (\ln x)' =$$

$$= -\sin x \cdot \ln x + \cos x \cdot \frac{1}{x}$$

$$\cos\left(x^2\right)$$

Pochodna funkcji złożonej

Twierdzenie

Jeżeli funkcja g ma pochodną w punkcie x_0, a funkcja f ma pochodną w punkcie $g(x_0)$, to

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0).$$

$$\left(f(g)\right)' = f'(g) \cdot g'$$

$$\sqrt[3]{x} = x^{1/3}$$

$$\left(x^{1/3}\right)' = \frac{1}{3} \cdot x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3} x^{-2/3} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

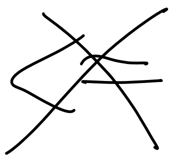
- $\left(\cos(x^2)\right)' = \cos'(x^2) \cdot (x^2)' = -\sin(x^2) \cdot 2x$
- $\left[\ln\left(\operatorname{arctg}\sqrt[3]{x}\right)\right]' = \ln'\left(\operatorname{arctg}\sqrt[3]{x}\right) \cdot \underline{\left(\operatorname{arctg}\sqrt[3]{x}\right)'} =$

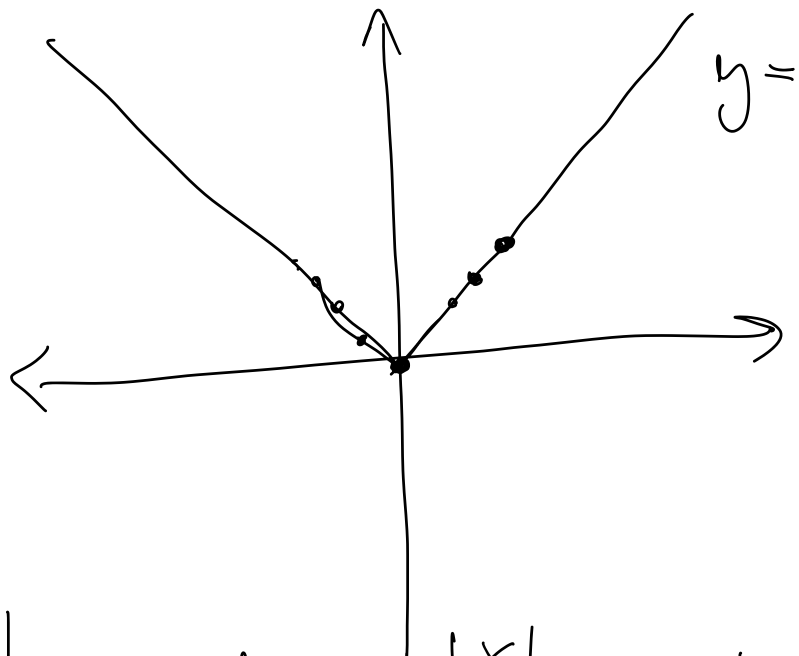
$$= \frac{1}{\operatorname{arctg}\sqrt[3]{x}} \cdot \operatorname{arctg}'\left(\sqrt[3]{x}\right) \cdot \left(\sqrt[3]{x}\right)' = \frac{1}{\operatorname{arctg}\sqrt[3]{x}} \cdot \frac{1}{1+\left(\sqrt[3]{x}\right)^2} \cdot \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}$$

Różniczkowalność a ciągłość

Twierdzenie

Jeżeli funkcja jest różniczkowalna w pewnym punkcie, to jest w tym punkcie ciągła.





$y = |x|$

$$\lim_{x \to 0} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$$ NIE ISTNIEJE

Pochodne jednostronne

Jeżeli funkcja f jest określona w pewnym otoczeniu lewostronnym punktu x_0, to granicę

$$f'_-(x_0) := \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

o ile istnieje, nazywamy **pochodną lewostronną** funkcji f w punkcie x_0.

Pochodne jednostronne

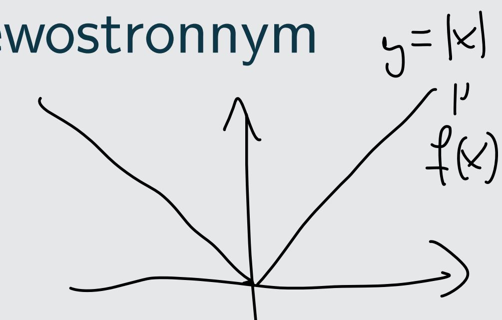
Jeżeli funkcja f jest określona w pewnym otoczeniu lewostronnym punktu x_0, to granicę

$$f'_-(x_0) := \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

o ile istnieje, nazywamy **pochodną lewostronną** funkcji f w punkcie x_0.

Jeżeli funkcja f jest określona w pewnym otoczeniu lewostronnym punktu x_0, to granicę

$$f'_+(x_0) := \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{h},$$



$f'_+(0) = 1$, $f'_-(0) = -1$

o ile istnieje, nazywamy **pochodną prawostronną** funkcji f w punkcie x_0.

$f'(x_0)$ istnieje $\equiv$ $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$

Pochodna w przedziale domkniętym

Jeżeli funkcja f jest określona na przedziale $[a, b)$ i ma pochodną prawostronną w a, to mówimy, że jest ona **różniczkowalna** w a.

Pochodna w przedziale domkniętym

Jeżeli funkcja f jest określona na przedziale $[a, b)$ i ma pochodną prawostronną w a, to mówimy, że jest ona **różniczkowalna** w a.

Jeżeli funkcja f jest określona na przedziale $(a, b]$ i ma pochodną lewostronną w b, to mówimy, że jest ona **różniczkowalna** w b.

$$f : [a, b] \to \mathbb{R}$$

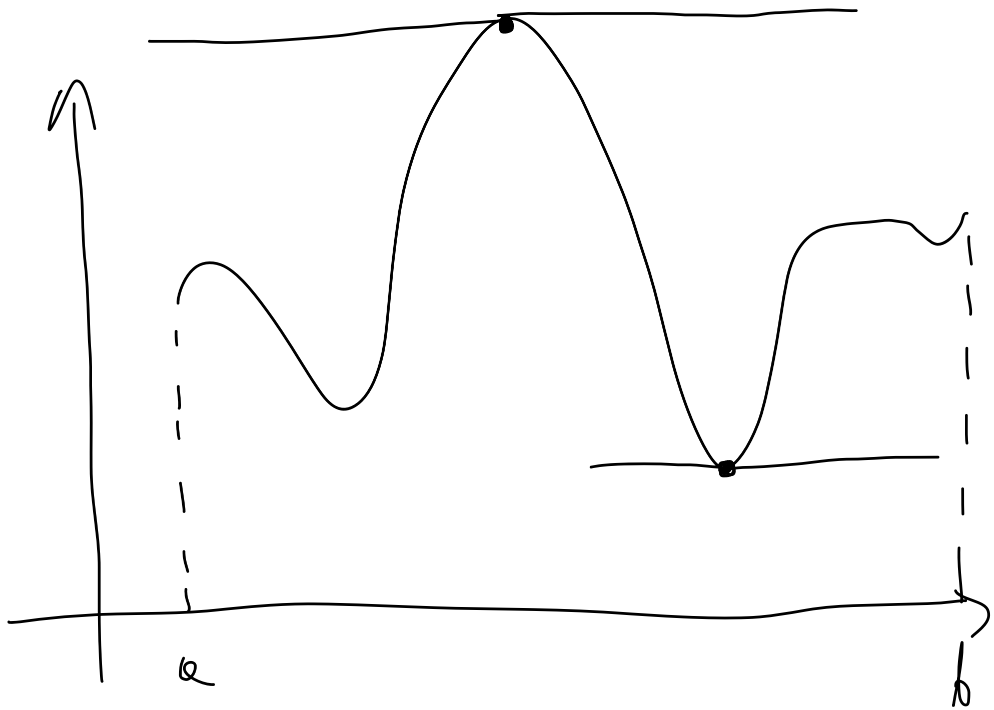
$$f'(x) = \begin{cases} f'_+(a), & x = a, \\ f'(x), & x \in (a, b), \\ f'_-(b), & x = b. \end{cases}$$

Pochodna a zachowanie funkcji

Twierdzenie Fermata

Jeżeli funkcja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ osiąga w punkcie x_0 kres dolny lub górny swoich wartości oraz istnieje pochodna $f'(x_0)$, to

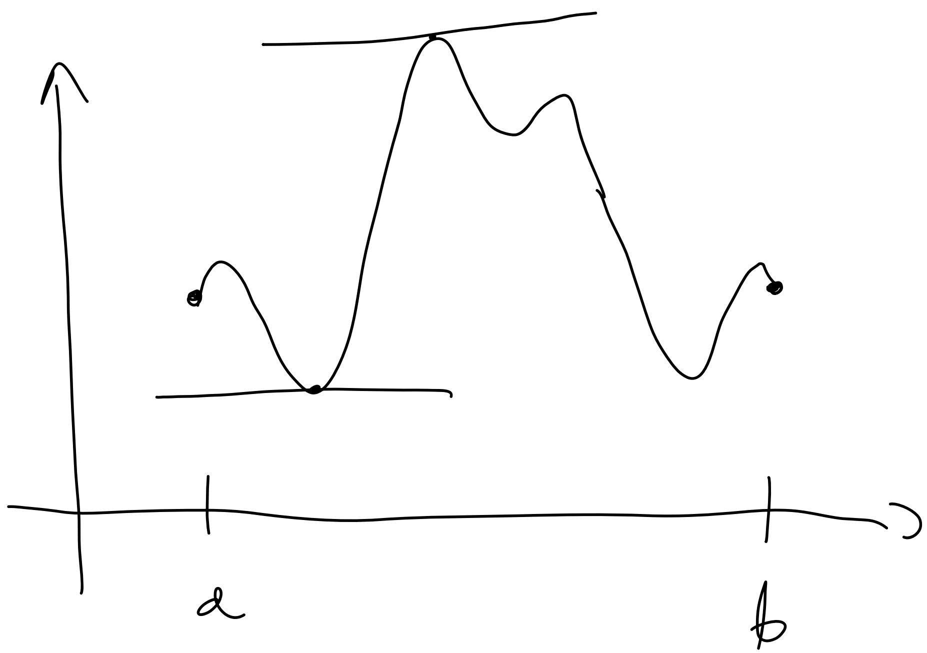
$$f'(x_0) = 0.$$



Twierdzenie Rolle'a

Jeżeli funkcja f jest ciągła w przedziale $[a, b]$ oraz różniczkowalna w przedziale (a, b), a dodatkowo $f(a) = f(b)$, to istnieje taki punkt $c \in (a, b)$, że

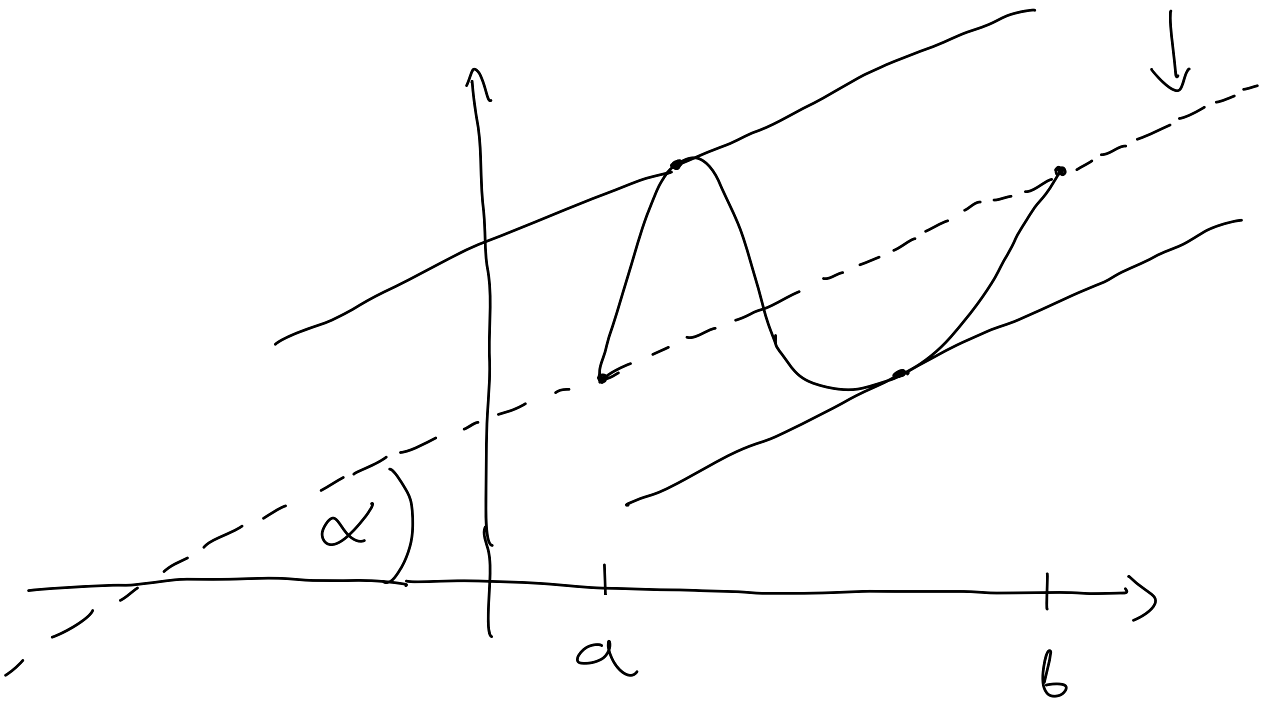
$$f'(c) = 0.$$



Twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej

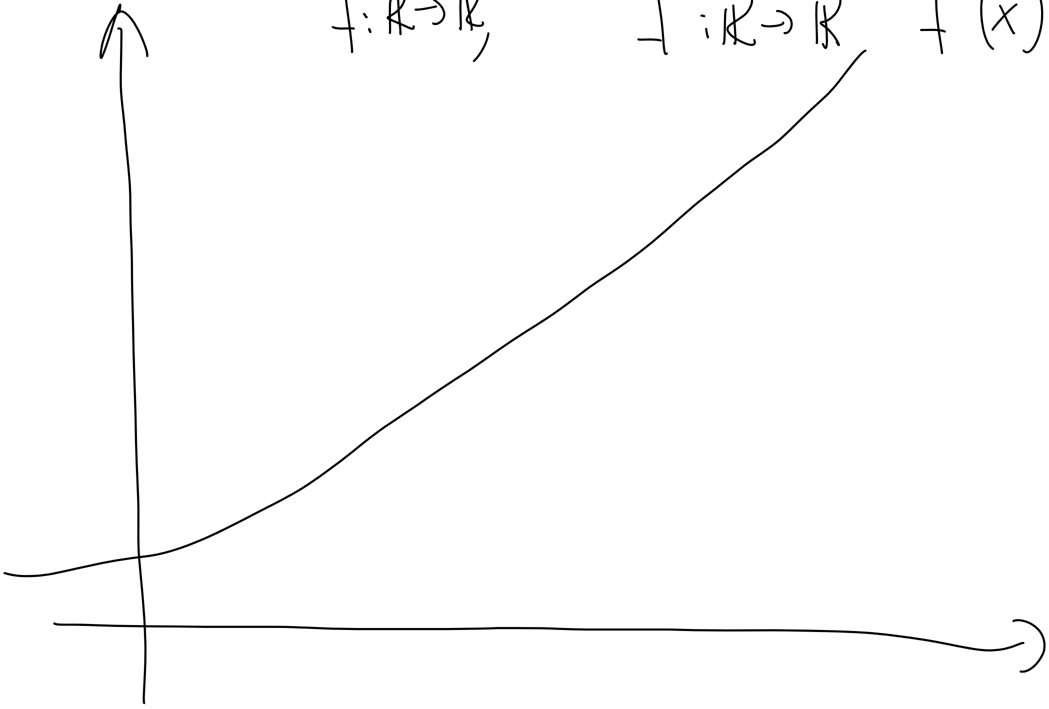
Jeżeli funkcja f jest ciągła w przedziale $[a, b]$ oraz różniczkowalna w przedziale (a, b), to istnieje taki punkt $c \in (a, b)$, że

$$f'(c) = \underbrace{\frac{f(b) - f(a)}{b - a}}.$$



$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f': \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f'(x) > 0$



$$\underbrace{\overset{>0}{f'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}}_{>0} \implies f(b) - f(a) > 0$$

$f(a) < f(b), \quad a < b$

$f \nearrow$

Pochodna a monotoniczność $(a,b), (a,b], [a,b), [a,b]$

Twierdzenie

Niech funkcja $f\colon I \to \mathbb{R}$ określona na dowolnym przedziale I będzie **ciągła** na I oraz **różniczkowalna** wewnątrz I. Wtedy:

- f jest stała na I $\equiv$ $f' = 0$ wewnątrz I.
- f jest rosnącą na I $\equiv$ $f' \geqslant 0$ wewnątrz I.
- f jest malejąca na I $\equiv$ $f' \leqslant 0$ wewnątrz I.

nierosnąca

niemalejąca

Pochodna a ścisła monotoniczność

Twierdzenie

Niech funkcja $f\colon I \to \mathbb{R}$ określona na dowolnym przedziale I będzie **ciągła** na I oraz **różniczkowalna** wewnątrz I. Jeżeli funkcja f' nie jest stale równa 0 na żadnym podprzedziale przedziału I, to

$\rightsquigarrow$ f jest **ściśle** rosnącą na I $\equiv$ $f' \geqslant 0$ wewnątrz I.

$\rightsquigarrow$ f jest **ściśle** malejąca na I $\equiv$ $f' \leqslant 0$ wewnątrz I.

$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\qquad f(x) = x^3 - 2x + 1$

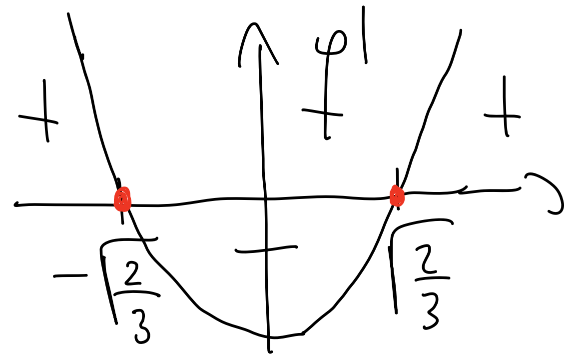
$f'(x) = 3x^2 - 2$

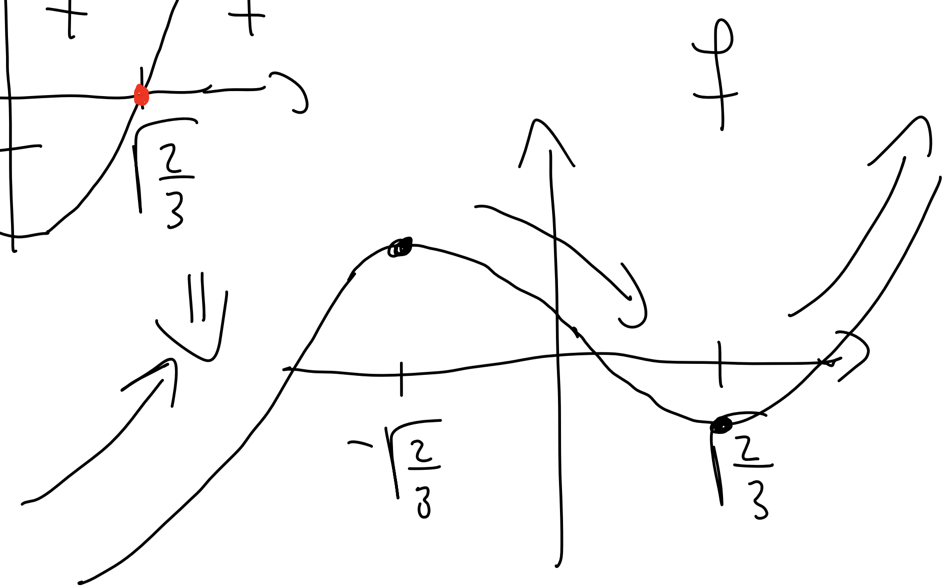
$f'(x) = 0 \equiv 3x^2 = 2$

$x^2 = \frac{2}{3}$

$|x| = \sqrt{\frac{2}{3}}$

$x = \sqrt{\frac{2}{3}} \lor x = -\sqrt{\frac{2}{3}}$





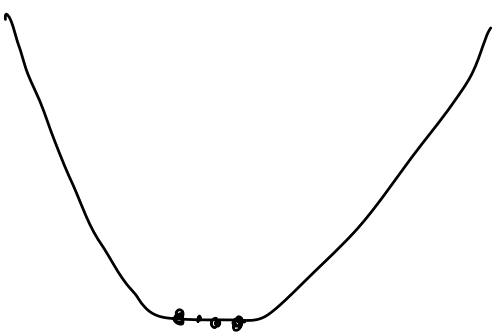
Ekstrema

Mówimy, że funkcja f ma w punkcie x_0 **minimum lokalne**, jeżeli

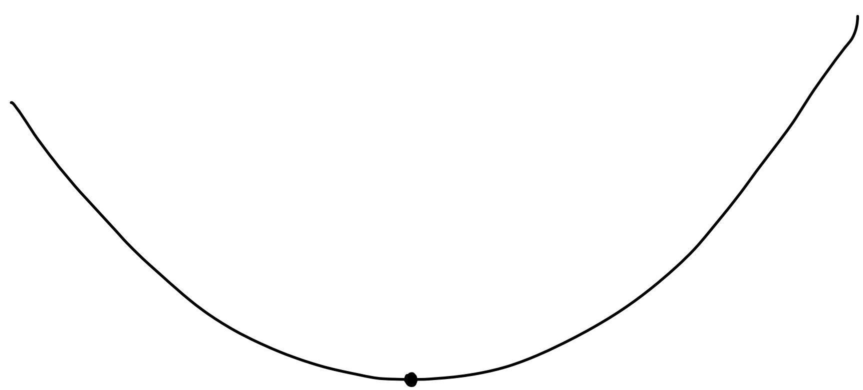
$$\bigvee_{\delta>0} \bigwedge_{x \in S(x_0,\delta)} f(x) \geqslant f(x_0).$$

$(x_0-\delta, x_0+\delta) \setminus \{x_0\}$

Jeżeli nierówność $\geqslant$ zamienimy na $>$, to powiemy, że jest to **minimum lokalne właściwe**.



$f(x_0)$



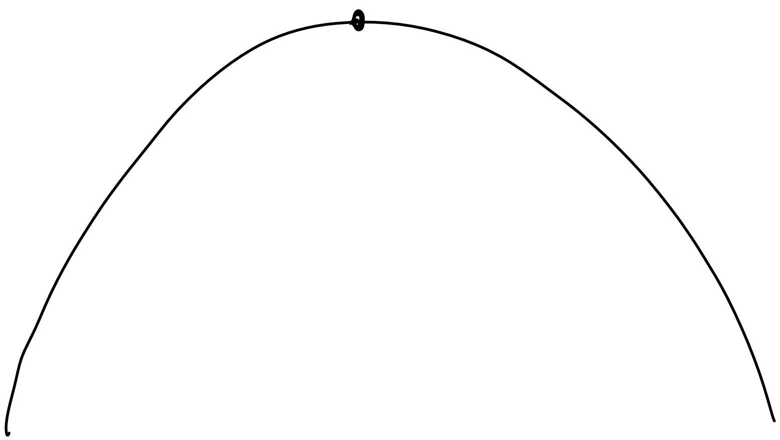
$f(x_0)$

Ekstrema

Mówimy, że funkcja f ma w punkcie x_0 **maksimum lokalne**, jeżeli

$$\bigvee_{\delta>0} \bigwedge_{x\in S(x_0,\delta)} f(x) \leqslant f(x_0).$$

Jeżeli nierówność $\leqslant$ zamienimy na $<$, to powiemy, że jest to **maksimum lokalne właściwe**.



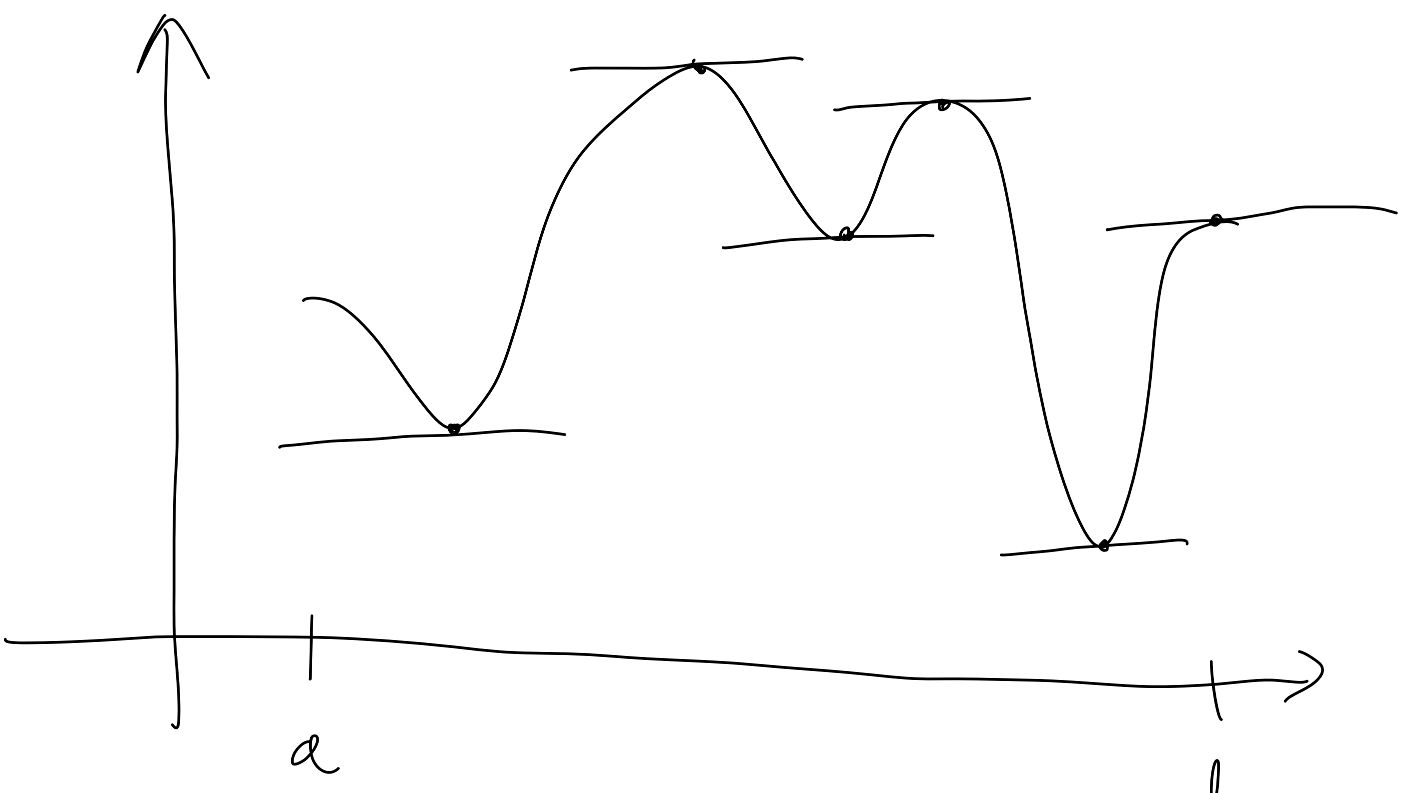
Warunek konieczny istnienia ekstremum

Twierdzenie Fermata

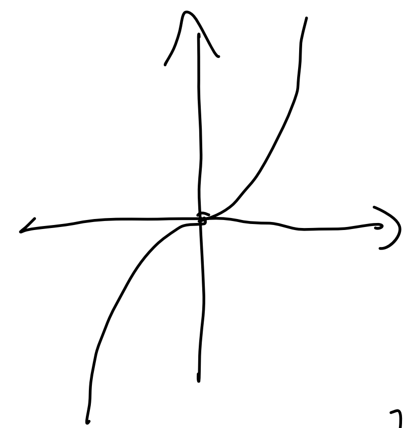
$\in (a,b)$

Jeśli funkcja $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ ma w punkcie x_0 ekstremum lokalne i jest w tym punkcie różniczkowalna, to

$$f'(x_0) = 0.$$



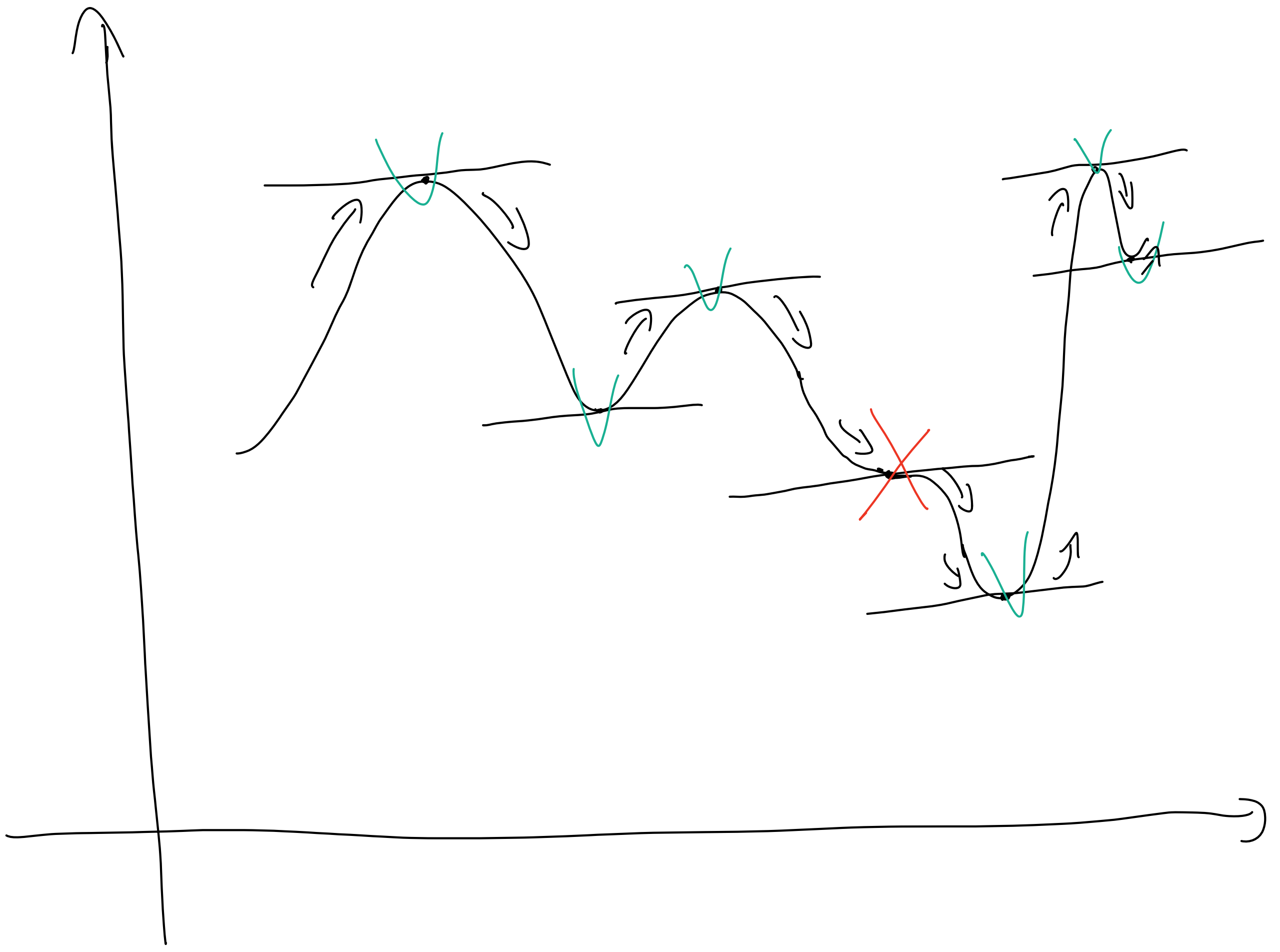
$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f(x) = x^3$



$f'(x) = (x^3)' = 3x^2$

$\boxed{f'(0) = 0}$ ale

nie ma ekstr. w p. 0.



Warunek dostateczny istnienia ekstremum

Niech funkcja $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ będzie **ciągła** w punkcie x_0 oraz dla pewnego $\delta > 0$ **różniczkowalna** w zbiorze $S(x_0, \delta)$.

- Jeżeli $f'(x) < 0$ dla każdego $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ oraz $f'(x) > 0$ dla każdego $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, to f ma w punkcie x_0 minimum lokalne właściwe,
- Jeżeli $f'(x) > 0$ dla każdego $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ oraz $f'(x) < 0$ dla każdego $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, to f ma w punkcie x_0 maksimum lokalne właściwe.

$f(x) = \ln x$

$f'(x) = \frac{1}{x}$

$(f')'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ $\qquad f''(x) = -\frac{1}{x^2}$

$f'''(x) = (f'')'(x) = \left(-\frac{1}{x^2}\right)' = \left(-x^{-2}\right)' = -\left(-2x^{-3}\right) =$

$= 2x^{-3} = \boxed{\frac{2}{x^3}}$

$f^{(4)}(x) = (f''')'$

$f^{(5)}(x) = \ldots$

Pochodne wyższych rzędów

Określoną indukcyjnie liczbę

$$f^{(n)}(x_0) = \begin{cases} f(x_0), & n = 0, \\ \left(f^{(n-1)}\right)'(x_0), & n \geqslant 1, \end{cases}$$

o ile istnieje, nazywamy **pochodną n-tego rzędu** funkcji f w punkcie x_0.

Pochodna n-tego rzędu iloczynu

Wzór Leibniza

Jeżeli funkcje f i g mają pochodne n-tego rzędu w punkcie x_0, to

$$(f \cdot g)^{(n)}(x_0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x_0) \cdot g^{(k)}(x_0)$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^{k}$$

$$w(x) = 2x^3 + x^2 - 3x + \underline{4}$$

$?$

$$w(0) = 4$$

$$w'(x) = \underline{6x^2 + 2x - 3}$$

$$u'(0) = -3$$

$$w''(x) = \underline{12x + 2}$$

$$u''(0) = 2 = 2 \cdot 1$$

"$2!$"

$$u'''(x) = 12$$

"$3!$"

$$u'''(0) = 12 = 6 \cdot 2$$

$$\boxed{w(x) = \frac{u'''(0)}{3!} \cdot x^3 + \frac{u''(0)}{2!} \cdot x^2 + \frac{u'(0)}{1!} \cdot x + \frac{u(0)}{0!}}$$

---

f

$$f(x) \overset{?}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \underline{R_n(x)}$$

Wzór Taylora

Załóżmy, że $I = [a, b]$ jest przedziałem domkniętym oraz $x, x_0 \in I$, $x \neq x_0$. Jeżeli dla liczby naturalnej $n \geqslant 1$ funkcja f ma

- ciągłą pochodną rzędu $n-1$ na przedziale I,
- pochodną rzędu n na przedziale (a, b),

to istnieje taki punkt c, leżący między x a x_0, że

?

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k}_{\text{wielomian Taylora}} + \underbrace{\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - x_0)^n}_{R_n}.$$

reszta w postaci Lagrange'a

Warunek dostateczny istnienia ekstremum

Załóżmy, że

- funkcja f ma w pewnym otoczeniu punktu x_0 pochodną f' oraz istnieje druga pochodna $f''(x_0)$.

Jeżeli

$$f'(x_0) = 0 \qquad \text{oraz} \qquad f''(x_0) \neq 0,$$

to funkcja f ma w punkcie x_0 ekstremum lokalne właściwe: **maksimum**, gdy $f''(x_0) < 0$, a **minimum**, gdy $f''(x_0) > 0$.

Warunek dostateczny istnienia ekstremum

Załóżmy, że

- funkcja f ma w pewnym otoczeniu punktu x_0 pochodne do rzędu $n-1$, a pochodna $f^{(n)}(x_0)$ istnieje.

Jeżeli

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \qquad \text{oraz} \qquad f^{(n)}(x_0) \neq 0$$

i n jest liczbą **parzystą**, to funkcja f ma w punkcie x_0 ekstremum lokalne właściwe: **maksimum**, gdy $f^{(n)}(x_0) < 0$, a **minimum**, gdy $f^{(n)}(x_0) > 0$.

Jeżeli liczba n jest nieparzysta, to funkcja nie posiada ekstremum w punkcie x_0.

Ekstrema globalne w przedziale domkniętym

Niech $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Jej wartość najmniejszą i największą znajdujemy następująco:

- Tam, gdzie to możliwe, obliczamy pochodną f'.
- Znajdujemy miejsca zerowe pochodnej.
- Obliczamy wartości funkcji
  - w punktach a i b,
  - w miejscach zerowych pochodnej,
  - w punktach, w których pochodna nie istnieje.
- Wybieramy najmniejszą i największą wartość obliczoną w punkcie poprzednim.

Przykład

Prostopadłościenne pudełko mające w podstawie kwadrat, ma mieć objętość 2000 cm^3. Materiał na dno kosztuje 30 zł za cm^2, zaś na ściany boczne jest o połowę tańszy. Jakie powinny być wymiary pudełka, aby koszt zużytego materiału był minimalny?

Reguła de l'Hospitala

Jeżeli funkcje f i g spełniają warunki:

- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$, przy czym $g(x) \neq 0$ w pewnym otoczeniu x_0 (poza, być może, samym punktem x_0),
- f' i g' istnieją w pewnym otoczeniu x_0 (poza, być może, samym punktem x_0) oraz istnieje granica $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ (właściwa lub niewłaściwa),

to

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Reguła de l'Hospitala

Jeżeli funkcje f i g spełniają warunki:

- $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$,
- f' i g' istnieją w pewnym otoczeniu x_0 (poza, być może, samym punktem x_0) oraz istnieje granica $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ (właściwa lub niewłaściwa),

to

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Reguła de l'Hospitala: uwagi

- Obie reguły de l'Hospitala są prawdziwe także dla granic jednostronnych oraz dla granic w $+\infty$ lub w $-\infty$.
- Reguły de l'Hospitala można również wykorzystywać do obliczania granic typu $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 1^{∞}, ∞^{0}, 0^{0}.