

Zestaw 6

1. Wykorzystując definicję całki Riemanna, oblicz granice:

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{3n} \right),$

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}.$

2. Oblicz całki oznaczone:

a) $\int_0^3 |1-x| dx,$

b) $\int_3^4 \ln|x-e| dx.$

3. Załóżmy, że funkcja f jest ciągła i parzysta na przedziale $[-a, a]$ dla pewnego $a \in \mathbb{R}$. Uzasadnij, że

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$$

4. Załóżmy, że funkcja f jest ciągła i nieparzysta na przedziale $[-a, a]$ dla pewnego $a \in \mathbb{R}$. Uzasadnij, że

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0.$$

5. Załóżmy, że funkcja f jest ciągła na przedziale $[a, b]$. Uzasadnij, że

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(a+b-x) dx.$$

6. Załóżmy, że dla pewnej funkcji ciągłej $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ i dowolnego $a \in \mathbb{R}$ zachodzi

$$\int_{a-1}^{a+1} f(x) dx = 2025.$$

Uzasadnij, że funkcja f jest okresowa.

7. Oblicz pole obszaru ograniczonego krzywymi:

a) $y = 2x - x^2, y = -x,$

b) $y = \frac{x^2}{2}, y = \frac{x^2}{4}, y = 4$ dla $x \geq 0.$

8. Oblicz długość krzywej

$$y = \ln \frac{e^x + 1}{e^x - 1} \quad \text{dla } \frac{1}{2} \leq x \leq 1.$$

9. Oblicz objętość bryły powstałej przez obrót krzywej

$$y = \operatorname{tg} x, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$$

dookoła osi Ox .

10. Oblicz pole powierzchni powstałej przez obrót dookoła osi Ox krzywej

$$y = 2x^3, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

11. Oblicz całki niewłaściwe:

a) $\int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx,$

b) $\int_0^{1/e} \frac{dx}{x \ln^2 x},$

c) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + (\operatorname{tg} x)^{\sqrt{2}}} dx$