Zestaw 4

1. Wyznacz:

a) $\sqrt{\mathrm{e}}$ z dokładnością 10^{-2},

b) $\ln 1.1$ z dokładnością 10^{-3}.

2. Wykorzystując wzór Taylora dla funkcji $x \mapsto \mathrm{e}^x$, uzasadnij, że liczba e jest niewymierna.

3. Oblicz granice:

a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\pi - \operatorname{arc\,tg} x}{\ln(x+1) - \ln x}$,

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right)$,

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^x$,

e) $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \cos\frac{\pi}{2x}\ln(1-x)$,

f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^3 \sin\frac{1}{x}}{\sin^2 x}$,

g) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2} - \operatorname{ctg}^2 x\right)$,

h) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\left[\mathrm{e} - \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right]$.

4. Wykorzystując wzór Taylora, oblicz granicę

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\sin(\sin x) - \sin^2 x}{\operatorname{tg}^6 x}.$$

Spróbuj wyznaczyć tę granicę przy pomocy reguły de l'Hospitala.

5. Wykorzystując metodę stycznych, dla ustalonego $a > 0$ skonstruuj ciąg zbieżny do a^{-1}. Oblicz kilka pierwszych przybliżeń dla $a = 7$.

6. Wykorzystując metodę stycznych, dla ustalonego $a > 0$ skonstruuj ciąg zbieżny do $a^{-1/2}$. Oblicz kilka pierwszych przybliżeń dla $a = 5$.

7. Oblicz przybliżoną wartość liczby π, wykorzystując fakt, że jest ona rozwiązaniem równania $\operatorname{tg}\frac{x}{4} = 1$.