Zestaw 1

1. Niech funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie dana wzorem

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Sprawdź, że jest ona różniczkowalna w każdym punkcie i oblicz jej pochodną.

2. Przy założeniu, że pochodna funkcji f w punkcie x_0 istnieje, oblicz granicę

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}.$$

Czy z istnienia tej granicy wynika istnienie pochodnej $f'(x_0)$?

3. Na paraboli $y = x^2$ zaznaczono dwa punkty o odciętych $x_1 = 1$ i $x_2 = 3$. Wyznacz równanie stycznej do tej paraboli, która jest równoległa do siecznej przechodzącej przez te punkty.

4. Parabola o równaniu $y = ax^2 + bx + c$ przechodzi przez punkt $(1, 2)$ i jest styczna do prostej $y = x$ w początku układu współrzędnych. Znajdź wartości a, b i c.

5. Rozważmy dowolną styczną do hiperboli $y = \frac{3}{x}$. Sprawdź, że odcinek tej stycznej zawarty między osiami współrzędnych dzieli się na połowy w punkcie styczności.

6. Znajdź wszystkie styczne do paraboli $y = x^2 - x$, przechodzące przez punkt o współrzędnych $(1, -1)$.

7. Znajdź wszystkie stycznie do hiperboli $y = \frac{x}{x+1}$ przechodzące przez punkt o współrzędnych $(1, 2)$.

8. Udowodnij, że styczna do krzywej $y = x^3$ w dowolnym punkcie $A(a, a^3)$ dla $a > 0$ przecina się z tą krzywą w jeszcze jednym punkcie, w którym nachylenie wykresu jest cztery razy większe od nachylenia w A.

9. Wykorzystując wzór na pochodną funkcji $x \mapsto x^n$ dla $n \in \mathbb{N}$, wyprowadź wzór na pochodną funkcji $x \mapsto \sqrt[n]{x}$.

10. Ze wzoru na pochodną funkcji odwrotnej wyprowadź wzór na pochodną $\operatorname{arc\,tg}$.