1. Uzasadnij, że
$$\operatorname{tg} x > x^3, \qquad x \in (0, \pi/2).$$

Rozwiązanie. Dla każdego x leżącego w dziedzinie funkcji tangens mamy $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, więc rozważaną nierówność można zapisać w postaci
$$\frac{\sin x}{\cos x} > x^3, \qquad x \in (0, \pi/2).$$
Ponieważ funkcja $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ jest ściśle rosnąca na $\mathbb{R}$, to ostatnia nierówność zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy
$$\sin^{1/3} x \cos^{-1/3} x > x, \qquad x \in (0, \pi/2).$$
Funkcja $x \mapsto \sin x$ przyjmuje na przedziale $(0, \pi/2)$ wartości z przedziału $(0, 1)$, więc $\sin x < \sin^{1/3} x$ dla dowolnego $x \in (0, \pi/2)$. Na rozważanym przedziale prawdziwa jest zatem nierówność
$$\sin^{1/3} x \cos^{-1/3} x > \sin x \cos^{-1/3} x.$$
Uzasadnimy, że
$$\sin x \cos^{-1/3} x > x, \qquad x \in (0, \pi/2). \tag{1}$$
W tym celu zdefiniujmy funkcję $f\colon [0, \pi/2)$ wzorem
$$f(x) = \sin x \cos^{-1/3} x - x, \qquad x \in [0, \pi/2)$$
Pokażemy, że $f(x) > 0$ dla $x \in (0, \pi/2)$, co jest równoważne nierówności (1).

Zauważmy, że
$$f'(x) = \cos^{2/3} x + \frac{1}{3} \sin^2 x \cos^{-4/3} x - 1.$$
Wykorzystując jedynkę trygonometryczną, otrzymujemy
$$f'(x) = \cos^{2/3} x + \frac{1}{3} \cos^{-4/3} x - \frac{1}{3} \cos^{2/3} x - 1 = \frac{2}{3} \cos^{2/3} x + \frac{1}{3} \cos^{-4/3} x - 1.$$
Na pierwszy rzut oka ciężko określić znaki i/lub miejsca zerowe pochodnej, więc spróbujmy policzyć drugą pochodną. Mamy
$$\begin{aligned} f''(x) &= -\frac{4}{9} \cos^{-1/3} x \sin x + \frac{4}{9} \cos^{-7/3} x \sin x = \\ &= \frac{4}{9} \sin x \cos^{-7/3} x (1 - \cos^2 x) = \\ &= \frac{4}{9} \sin^3 x \cos^{-7/3} x. \end{aligned}$$
Ponieważ funkcje $x \mapsto \sin x$ i $x \mapsto \cos x$ są dodanie na przedziale $(0, \pi/2)$, to $f''(x) > 0$ dla $x \in (0, \pi/2)$. Ponadto $f''(0) = 0$, więc f' jest funkcją ściśle rosnącą na przedziale $[0, \pi/2)$. Widzimy jednak, że $f'(0) = 0$, co implikuje, że $f'(x) > 0$ dla dowolnego $x \in (0, \pi/2)$. To jednak dowodzi, że funkcja f jest ściśle rosnąca na przedziale $(0, \pi/2)$, więc $f(x) > f(0)$ dla dowolnego $x \in (0, \pi/2)$. Wykorzystując fakt, że $f(0) = 0$, otrzymujemy ostatecznie $f(x) > 0$ dla $x \in (0, \pi/2)$, co chcieliśmy uzasadnić.