$$\begin{cases} x+2y+3z-2t-u=6 \\ 3x+6y+5z-2t-9u=1 \\ 2x+4y+2z-8u=-5 \\ 2x+4y+7z-5t+u=17 \\ x+2y+6z-5t-10u=12 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 2 & 3 & -2 & -1 & 6 \\ 3 & 6 & 5 & -2 & -9 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & -8 & -5 \\ 2 & 4 & 7 & -5 & 1 & 17 \\ 1 & 2 & 6 & -5 & -10 & 12 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{w_3-2w_1 \\ w_4-2w_1 \\ w_5-w_1}]{w_2-3w_1} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & -1 & 6 \\ 0 & \boxed{0} & -4 & 4 & -6 & -17 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & -6 & -17 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -9 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow[w_2 \leftrightarrow w_4]{\substack{w_3-w_2 \\ \cancel{w_3}}}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & -6 & -17 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -9 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow[w_4-3w_2]{w_3+4w_2} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -18 & -9 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{w_4+3w_3 \\ \cancel{w_4}}}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{6} & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{w_3 \cdot \frac{1}{6}} \left[\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 2 & 3 & -2 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{1}{2} \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{w_1+w_3 \\ w_2-3w_3}}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 0 & \frac{13}{2} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 & 0 & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right] \xrightarrow{w_1-3w_2} \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right] \\ \begin{array}{ccccc} x & y & z & t & u \end{array} \end{array}$$

$$\begin{cases} x+2y+t=-4 \\ z-t=\frac{7}{2} \\ u=\frac{1}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x=-4-2y-t \\ z=\frac{7}{2}+t \\ u=\frac{1}{2} \end{cases}$$

parametry

$$\boxed{y, t \in \mathbb{R}}$$

$y=1, t=-2: \quad x=-4, \; z=\frac{3}{2}, \; u=\frac{1}{2}$

$$\begin{cases} x + a^2 y + z = -a \\ x + y - az = a^2 \\ y + z = 1 \end{cases}$$

$\underline{a \in \mathbb{R}}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & a^2 & 1 & -a \\ 1 & 1 & -a & a^2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{w_2 - w_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a^2 & 1 & -a \\ 0 & \boxed{1-a^2} & -a-1 & a^2+a \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{w_2 \leftrightarrow w_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a^2 & 1 & -a \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 1 \\ 0 & 1-a^2 & -a-1 & a^2+a \end{array}\right] \xrightarrow{w_3 - w_2(1-a^2)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a^2 & 1 & -a \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \underline{a^2-a-2} & 2a^2+a-1 \end{array}\right]$$

$$a^2 - a - 2 = (a+1)(a-2)$$

$a = -1 \quad a = 2$

$$2a^2 + a - 1 = 2\left(a - \tfrac{1}{2}\right)(a+1)$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a^2 & 1 & -a \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{(a+1)(a-2)} & 2\left(a-\tfrac{1}{2}\right)(a+1) \end{array}\right]$$

I $a = 2$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{array}\right]$$

$\hookrightarrow 0 = 9$ sprz.

II $a = -1$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{w_1 - w_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y + z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 - z \\ \boxed{z \in \mathbb{R}} \end{cases}$$

III $a \notin \{-1, 2\}$

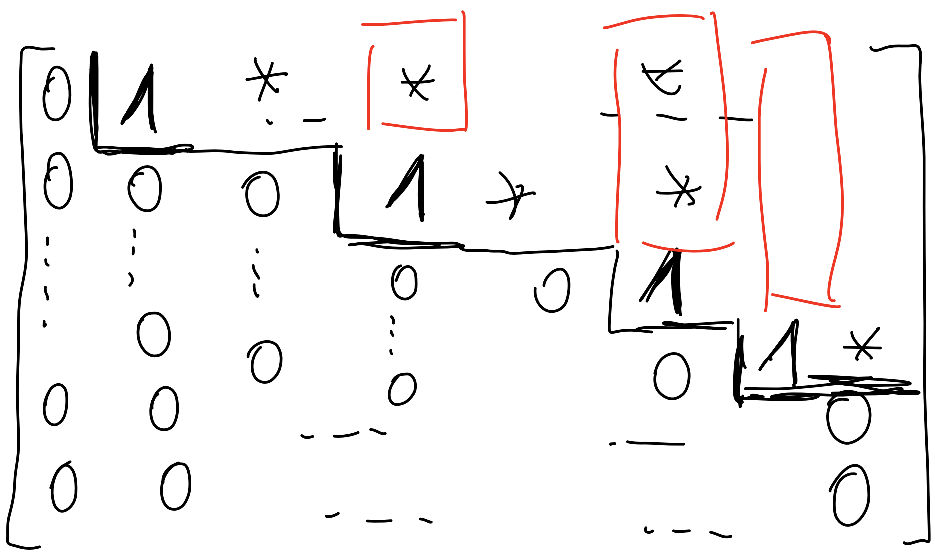
$$\xrightarrow{w_3 : (a+1)(a-2)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a^2 & 1 & -a \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{2\left(a-\frac{1}{2}\right)}{a-2} \end{array}\right] \xrightarrow[w_2 - w_3]{w_1 - w_3}$$

cw ...

Postać zredukowana/schodkowa macierzy

Powiemy, że macierz jest w postaci **zredukowanej** (lub **schodkowej**), jeżeli:

- poniżej żadnego wiersza złożonego z samych zer nie ma wiersza niezerowego,
- w każdym niezerowym wierszu pierwszym niezerowym elementem (licząc od lewej strony) jest 1,
- w każdych dwóch niezerowych wierszach pierwsza 1 w wierszu znajdującym się wyżej występuje wcześniej (licząc od lewej strony) niż pierwsza 1 w wierszu znajdującym się niżej.



Postać zredukowana/schodkowa macierzy

Powiemy, że macierz jest w postaci **zredukowanej** (lub **schodkowej**), jeżeli:

- poniżej żadnego wiersza złożonego z samych zer nie ma wiersza niezerowego,
- w każdym niezerowym wierszu pierwszym niezerowym elementem (licząc od lewej strony) jest 1,
- w każdych dwóch niezerowych wierszach pierwsza 1 w wierszu znajdującym się wyżej występuje wcześniej (licząc od lewej strony) niż pierwsza 1 w wierszu znajdującym się niżej.

Macierz jest w postaci **całkowicie zredukowanej**, jeżeli jest w postaci zredukowanej oraz

- w każdej kolumnie, w której występuje wiodąca 1, nie ma innych elementów niezerowych.

Jednoznaczność postaci zredukowanej

Twierdzenie

Każdą macierz można sprowadzić do postaci całkowicie zredukowanej przez wykonanie ciągu operacji elementarnych. Ponadto, wszystkie uzyskane w ten sposób postaci całkowicie zredukowane są równe, a liczba wiodących 1 w każdej postaci zredukowanej jest równa liczbie wiodących 1 w postaci całkowicie zredukowanej.

Rząd macierzy

Rzędem macierzy nazywamy liczbę wiodących 1 w jej postaci (całkowicie) zredukowanej.

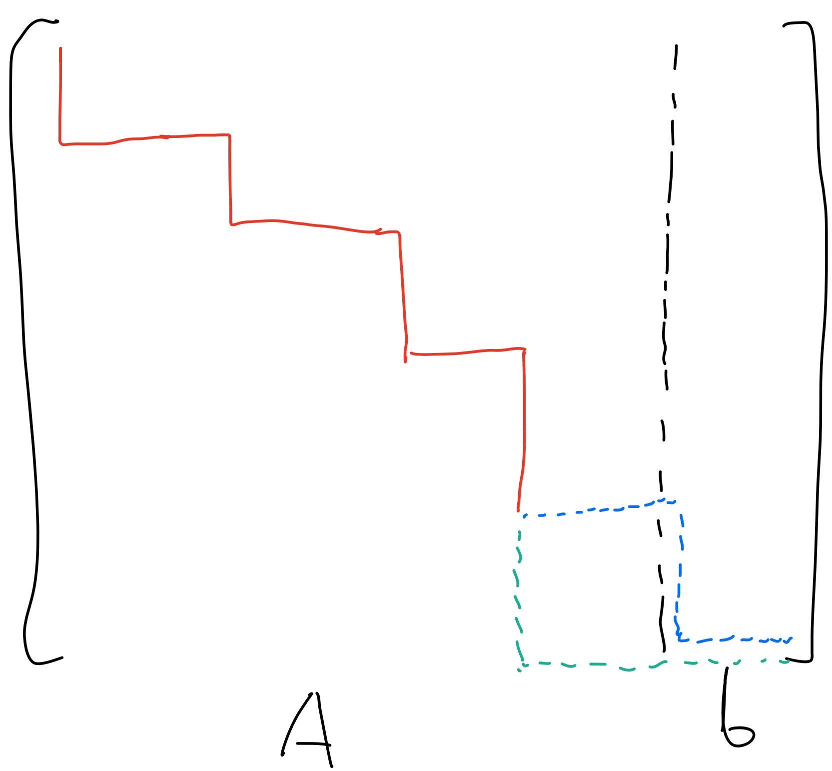
$$\left[\begin{array}{c|c} A & b \end{array}\right] \qquad A$$

$$\operatorname{rz}\left[\begin{array}{c|c} A & b \end{array}\right] \qquad \operatorname{rz} A$$

$$\operatorname{rank}\left[\begin{array}{c|c} A & b \end{array}\right] \qquad \operatorname{rank} A$$

Twierdzenie Kroneckera-Capellego

Układ równań ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy rząd macierzy rozszerzonej układu jest równy rzędowi macierzy układu.



- sprzeczność
- układ ma rozwiązanie

1 rozw.

∞ wiele rozw.

rz A = liczba niewiadomych

rz A < l. niewiadomych

∞ wiele rozw. zależnych od $n - \text{rz} A$ parametrów

Macierze

Macierzą wymiaru $m \times n$ nazywamy tablicę liczb rzeczywistych lub zespolonych postaci

l. kolumn

l. wierszy

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

a_{ij}

$a[i][j]$

i-tego wiersz

j-te kolumna

Zbiór macierzy $m \times n$ oznaczamy przez

$$\mathbb{R}_{m\times n} \qquad \text{lub} \qquad \mathbb{C}_{m\times n}.$$

$$[a_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} \qquad\qquad [a_{ij}]$$

Dodawanie macierzy

Jeżeli $A = [a_{ij}]$ i $B = [b_{ij}]$ są macierzami tego samego wymiaru, to ich sumę definiujemy wzorem

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}].$$

$$\overset{2\times 4}{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}} + \overset{2\times 4}{\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 4 \\ -1 & 4 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Mnożenie macierzy przez liczbę

Jeżeli A jest macierzą, a c liczbą rzeczywistą/zespoloną, to iloczyn cA definiujemy wzorem

$$cA = [ca_{ij}].$$

$$2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -6 & 0 \end{bmatrix}$$

Własności działań

Dla dowolnych macierzy A, B i C oraz dowolnych liczb c i d zachodzą wzory (o ile tylko podane działania można wykonać):

$A, B, C \in \mathbb{R}_{m \times n}$

- $A + B = B + A$
- $A + (B + C) = (A + B) + C$
- $cA = Ac$
- $c(A + B) = cA + cB$
- $(c + d)A = cA + dA$
- $(cd)A = c(dA)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 6 & -5 \end{bmatrix}$$

$$(a,b)\cdot(c,d) \cancel{=} (ac, bd)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

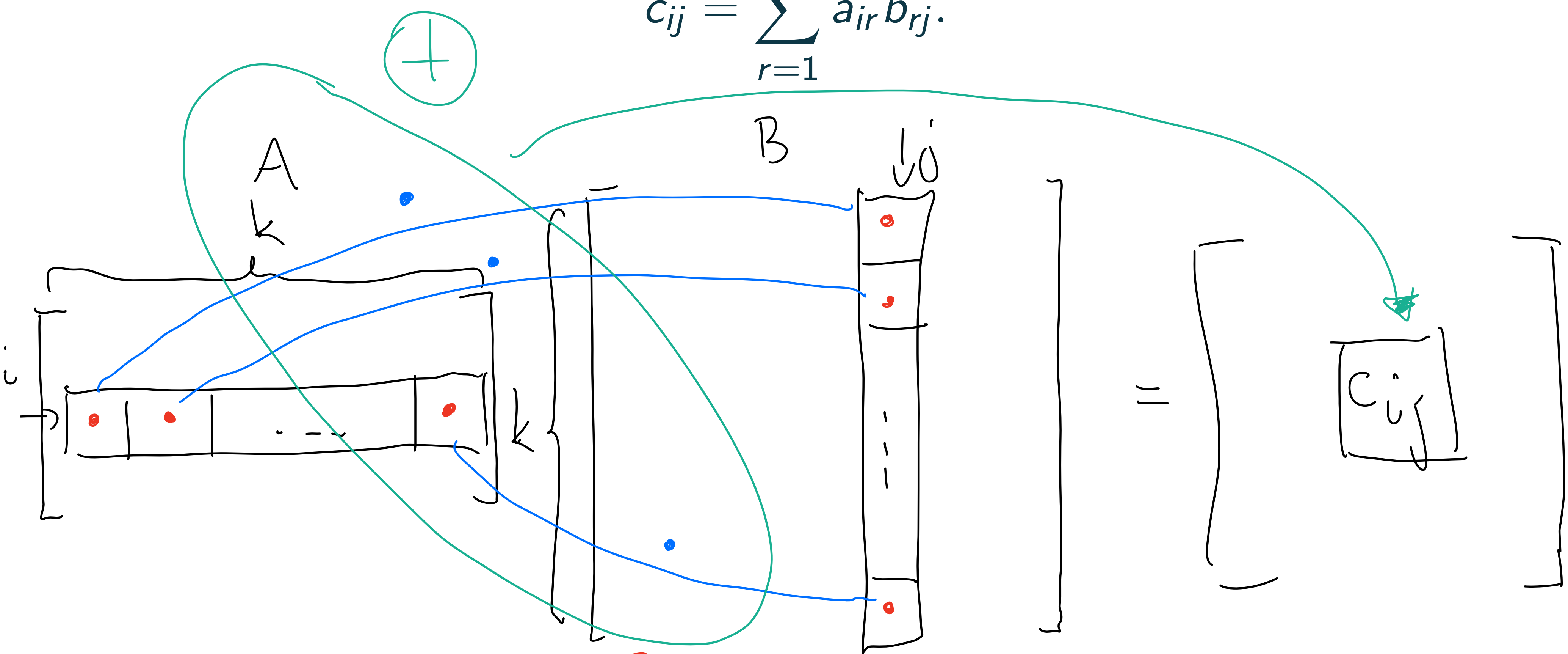
Mnożenie macierzy

Jeżeli A jest macierzą wymiaru $m \times k$, a B macierzą wymiaru $k \times n$, to iloczyn AB definiujemy jako macierz wymiaru $m \times n$ wzorem

$$AB = [c_{ij}],$$

przy czym

$$c_{ij} = \sum_{r=1}^{k} a_{ir} b_{rj}.$$



$$\underset{2\times 3}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}} \cdot \underset{3\times 3}{\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}} = \underset{2\times 3}{\begin{bmatrix} \boxed{-1} & \boxed{4} & 5 \\ 4 & 6 & 6 \end{bmatrix}}$$

Własności iloczynu macierzy

Dla dowolnych macierzy A, B i C oraz dowolnej liczby c zachodzą wzory (o ile tylko podane działania można wykonać):

- $A(B + C) = AB + AC$
- $(A + B)C = AC + BC$
- $c(AB) = (cA)B = A(cB)$
- $A(BC) = (AB)C = ABC$

$\boxed{?\ AB = BA}$

!

$$A \cdot \left[\sum_{r=1}^{n} b_{ir} c_{rj}\right]^{ij} = \left[\sum_{q=1}^{k} a_{mq} \cdot \left(\sum_{r=1}^{n} b_{qr} c_{rj}\right)\right]$$

$$= \left[\sum_{q=1}^{k} \sum_{r=1}^{n} (a_{mq} b_{qr}) c_{rj}\right] = \left[\sum_{r=1}^{n} \left(\sum_{q=1}^{k} a_{mq} b_{qr}\right) \cdot c_{rj}\right]$$

$$= (AB) \cdot C$$

$AB = BA$? NIE

1) $A - m \times k$

$B - k \times n$

AB istnieje $m \times n$

$B \cdot A$?

$k \times n \quad m \times k$

$m \neq n \Rightarrow BA$ nie istnieje

2) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 8 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$

Intuicja

$A \rightsquigarrow f$

$B \rightsquigarrow g$

$f(g) \neq g(f)$

$AB \rightsquigarrow f(g)$

Macierz jednostkowa

$$n \times n$$

$$I = I_n = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}$$

$A \quad n \times n$

$$A I_n = I_n A = A$$

$A \quad m \times n$

$$A I_n = I_m A = A$$

Złożoność mnożenia macierzy

$A \quad m \times k$

$B \quad k \times n$

$A \cdot B$? $= \left[\sum_{r=1}^{k} a_{ir} \cdot b_{rj} \right]_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$

$+$ tanie

$\cdot$ drogie

$AB \quad \boxed{m \times n}$ ← tyle el. musimy wyliczyć

AB – $m \cdot n \cdot k$ mnożeń

$A, B \quad n \times n$

$AB \quad$ koszt $= n \cdot n \cdot n = \boxed{n^3}$

$\boxed{n^2} \leq$ koszt $\leq n^3$

?

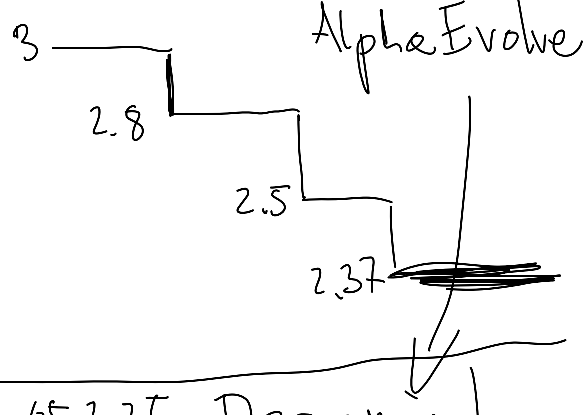
1969 $\boxed{\text{Strassen}}$ $n^{2.807\dots}$

1980 Schönhage $n^{2.5\dots}$

1990 Coppersmith Winograd $n^{2.375\dots}$

2024 $n^{\boxed{2.371}\dots}$ 4

2025 ?



14.05.2025 Deepmind

$(4 \times 4) \cdot (4 \times 4)$ 49 48

1969 Strassen

1960 $\quad - \ n^2$ množení

$x \cdot y$

n-bitou $\quad$ n-bitou

Karatsuba

$$\begin{array}{r} 13 \\ \cdot\ 29 \\ \hline 97 \\ 26\ \\ \hline 357 \end{array}$$

$$\overline{ab} \cdot \overline{cd} = (10a + b)(10c + d) =$$

$$= 100ac + 10\boxed{(ad + bc)} + bd$$

$$ad + bc = (a+b)(c+d) - ac - bd$$

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

$$= 100ac + 10\left[(a+b)\cdot(c+d) - ac - bd\right] + bd$$

$xy \quad n^2 \rightsquigarrow n^{\log_2 3} \approx n^{1.58\ldots}$

Cv.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$$

8 množení

$\downarrow$

7 množení

Cv.