Zasadnicze twierdzenie algebry

Każdy wielomian stopnia $\geqslant 1$ ma pierwiastek zespolony.

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 \,, \quad z \in \mathbb{C}$$

$$a_k \in \mathbb{C} \,, \quad k = 0, 1, \ldots, n \qquad \underline{n \geqslant 1}$$

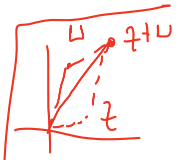
$$\bigvee_{z_0 \in \mathbb{C}} P(z_0) = 0$$

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 , \quad n \geq 1, \quad a_n \neq 0$$

Możemy założyć, że $a_n = 1$.

$$P(z) = a_n \underset{\uparrow}{Q(z)}$$

wielomian stopnia n postaci $z^n + \ldots$



$$P(z) = z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$$

Fakt 1. Funkcja $|P|$ osiąga swój kres dolny, tzn.

$$\bigvee_{z_0 \in \mathbb{C}} \ \bigwedge_{z \in \mathbb{C}} |P(z_0)| \leq |P(z)| .$$

$$|z+w| \leq |z| + |w|$$

$$|z-w| \geq |z| - |w|$$

ćw.

Dow.

$$|P(z)| = |z^n + \ldots| = |z|^n \cdot \left| 1 + \frac{a_{n-1}}{z} + \ldots + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z^n} \right| \geq$$

$$\geq |z|^n \cdot \left(1 - \frac{|a_{n-1}|}{\underline{|z|}} - \ldots - \frac{|a_1|}{\underline{|z|^{n-1}}} - \frac{|a_0|}{\underline{|z|^n}} \right) \geq$$

$$\{\text{dla } |z| \geq 1\} \geq |z|^n \left(1 - \frac{1}{|z|} \left(|a_{n-1}| + \ldots + |a_1| + |a_0| \right) \right) \geq$$

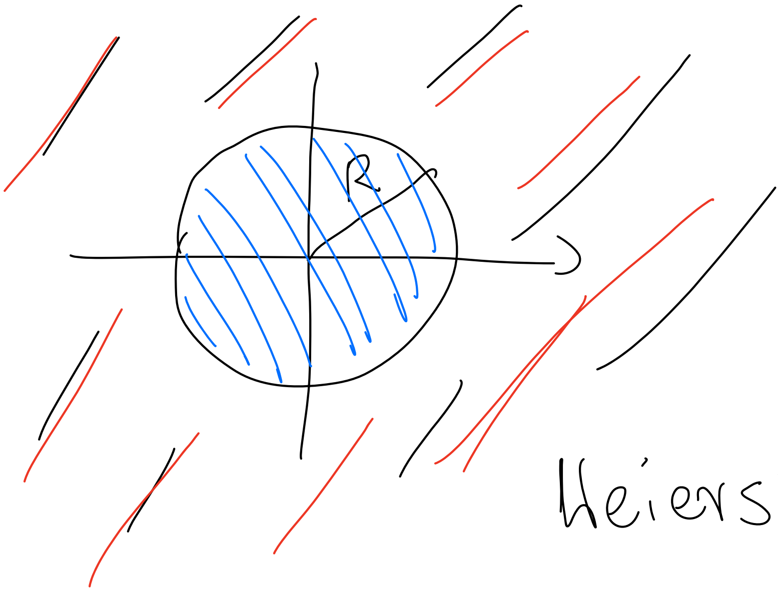
$$\geq |z|^n \left(1 - \underbrace{\frac{n \cdot \max_{k \in \{0,\ldots,n-1\}} |a_k|}{|z|}}_{< \frac{1}{2}} \right) \geq$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{dla } |z| \geq R > 1 \\ R = 2(1 + n \cdot \max_k |a_k|) \end{array} \right\} \geq |R|^n \left(1 - \underbrace{\frac{n \cdot \max |a_k|}{2(1 + n \cdot \max |a_k|)}}_{< 1} \right) \geq$$

$$\geq \frac{1}{2} R^n \overset{R > 1}{\geq} \frac{1}{2} R \underset{R > 2|a_0|}{\geq} |a_0|$$

$$\Longrightarrow \underline{|P(z)| \geq |a_0| = |P(0)| \text{ dla } \boxed{|z| \geq R .}}$$

$$\Longrightarrow \quad |P(z)| \geq |a_0| = |P(0)| \text{ dla } \boxed{|z| \geq R.}$$



$$|P(z)| \geq |P(0)|$$

Weierstrassa

[Tw. Weierstrassa ⟹ Funkcja ciągła $|P|$ osiąga swoje kresy w kole domkniętym $|z| \leq R$.

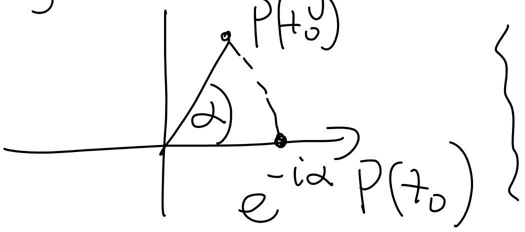
$$\Longrightarrow \bigvee_{z_0 \in \{z:\ |z| \leq R\}} \ \bigwedge_{z \in \{z:\ |z| \leq R\}} |P(z)| \geq |P(z_0)|$$

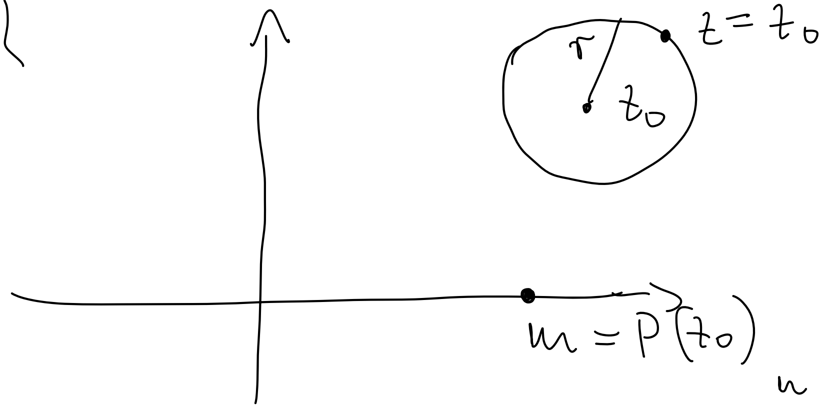
$$\Longrightarrow \bigvee_{z_0 \in \{z:\ |z| \leq R\}} \ \bigwedge_{z \in \mathbb{C}} |P(z)| \geq |P(z_0)|.$$

Fakt 2. $P(z_0) = 0$.

Dow. Załóżmy, że $P(z_0) \neq 0$. Możemy przyjąć, że $P(z_0) = m$ jest liczbą rzeczywistą dodatnią.

$$\left\{ e^{i(-\mathrm{Arg}(P(z_0)))} P(z_0) > 0 \right.$$





$$\boxed{(a+b)^k = \sum_{m=0}^{k} \binom{k}{m} a^m b^{k-m}}$$

$$P(z) = P(z_0 + re^{i\alpha}) = \sum_{k=0}^{n} a_k \underline{(z_0 + re^{i\alpha})^k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_k z_0^k + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \underbrace{w_k(z_0)} r^k e^{ik\alpha}} =$$

$$= P(z_0) + \dots$$

$$\bigvee_k w_k(z_0) \neq 0 \; ?$$

$\Big\{$ $P(z) = P(z_0)$ dla $|z - z_0| = r$
Tak być nie może, bo wielomian $P - P(z_0)$ miałby nieskończenie wiele pierw. $\Big\}$

$$P(z) = P(z_0) + w_k(z_0) r^k e^{ik\alpha} + \underbrace{\sum_{m=k+1}^{n} w_m(z_0) r^m e^{im\alpha}}$$

$$|P(z)| = | \qquad\qquad | \leq$$

$$|P(z_0) + w_k(z_0) r^k e^{ik\alpha}| + | \qquad |$$

$$|P(t)| \leq |P(t_0) + u_k(t_0) r^k e^{ik\alpha}| + \underbrace{\left|\sum_{m=k+1}^{n} u_m(t_0) r^m e^{im\alpha}\right|}_{(*)}$$

$$(*) \leq \sum_{m=k+1}^{n} |u_m(t_0)| \cdot r^m \underbrace{|e^{im\alpha}|}_{\shortparallel \atop 1} =$$

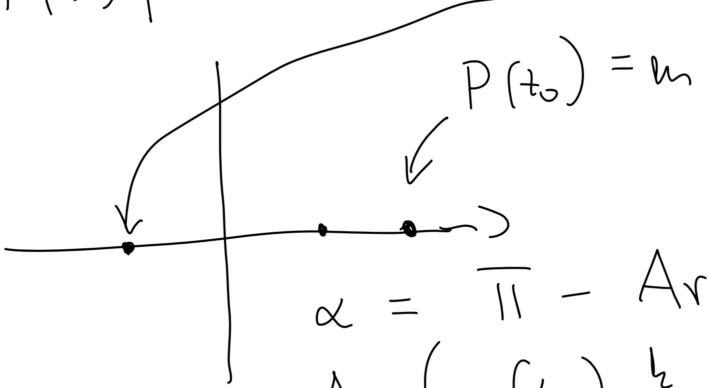
$$= \sum_{m=k+1}^{n} \boxed{|u_m(t_0)|} \, r^m \leq \sum_{m=k+1}^{n} C r^m =$$

$$\leq C = \max |u_m(t_0)|$$

$$= C \sum_{m=k+1}^{n} r^m = C r^{k+1} \underbrace{\boxed{\frac{1-r^{n-k}}{1-r}}}_{\leq 1} \leq \left\{ r < 1 \right\}$$

$$\leq C r^{k+1}$$

$$|P(t)| \leq |P(t_0) + \underbrace{u_k(t_0) r^k e^{ik\alpha}}| + C r^{k+1} = (**)$$



$$\alpha = \pi - \mathrm{Arg}(u_k(t_0))$$

$$\mathrm{Arg}(u_k(t_0) r^k e^{ik\alpha}) = \mathrm{Arg}(u_k(t_0)) + \pi - \mathrm{Arg}(u_k(t_0))$$

$$= \pi$$

$$(**) = \left| m - |u_k(t_0) r^k e^{ik\alpha}| \right| + C r^{k+1} =$$

$$= \left| m - |u_k(t_0)| r^k \right| + C r^{k+1}$$

$$|P_k(t)| \leq \left| m - |u_k(t_0)| r^k \right| + C r^{k+1} =$$

$$\left\{ r < \sqrt{\frac{m}{|u_k(t_0)|}} \right\} = m - |u_k(t_0)| r^k + C r^{k+1} <$$

$$\left\{ r < \frac{|u_k(t_0)|}{C} \right\} < m$$

Sprzeczność!

$$-|u_k(t_0)| r^k + C r^{k+1} < 0$$

$$C r^{k+1} < |u_k(t_0)| r^k$$

$$C r < |u_k(t_0)|$$

$$r < \frac{|u_k(t_0)|}{C}$$

kres dolny $|P|$.

$$\bigwedge_{t \in \mathbb{C}} |P(t)| \geq m.$$

$$\Rightarrow P(t_0) = 0.$$

Zasadnicze twierdzenie algebry

Każdy wielomian p stopnia $\geqslant 1$ ma dokładnie n pierwiastków zespolonych $z_1, z_2, \ldots, z_n$ i

$$p(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_n).$$

Ukázky rovnic

$$\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases}$$

$$x = 3 + 2y$$

$$2(3 + 2y) + 3y = 5$$

$$6 + 4y + 3y = 5$$

$$7y = -1$$

$$y = -\frac{1}{7} \Rightarrow x = 3 + 2 \cdot \frac{-1}{7} = \frac{19}{7}$$

$$\begin{cases} x = \frac{19}{7} \\ y = -\frac{1}{7} \end{cases}$$

Układy równań liniowych

Dla liczb a_{ij}, przy czym $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$ oraz b_i, $i = 1, \ldots, m$ **układem m równań liniowych z n niewiadomymi** nazywamy układ

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$x_1, \ldots, x_n$ – niewiadome

a_{ij} – współczynniki

b_i – wyrazy wolne

a_{ij}

nr równania

nr niewiadomej

Macierz układu równań

Postacią macierzową układu równań nazywamy tablicę

$$\underbrace{\left[\underbrace{\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix}}_{\text{macierz układu}} \;\middle|\; \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{matrix}\right]}_{\text{macierz rozszerzona}}$$

$$[A \mid b]$$

$$\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases} \longleftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{array}\right]$$

$$\vdots$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & ? \\ 0 & 1 & ? \end{array}\right] \longleftrightarrow \begin{array}{l} x = ? \\ y = ? \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 3 \\ \boxed{2} & 3 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{w_2 - 2 \cdot w_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 3 \\ 0 & \boxed{7} & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{w_2 \cdot \frac{1}{7}}$$

$$\begin{array}{r} x - 2y = 3 \quad | \cdot 2 \\ -(2x - 4y = 6) \\ 2x + 3y = 5 \\ \hline 0x + 7y = -1 \end{array}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \boxed{-2} & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} \end{array}\right] \xrightarrow{w_1 + 2 \cdot w_2}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{19}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x = \frac{19}{7} \\ y = -\frac{1}{7} \end{cases}$$

Operacje elementarne

- ⇝ Zamiana miejscami wiersza i-tego z wierszem j-tym.
- ⇝ Pomnożenie i-tego wiersza przez dowolną liczbę $c \neq 0$.
- ⇝ Dodanie do wiersza i-tego wiersza j-tego pomnożonego przez liczbę c.

$$\begin{aligned} &a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n = b_i && \uparrow + && \downarrow - \\ &\vdots \\ &a_{j1}x_1 + \dots + a_{jn}x_n = b_j && \Big| \cdot c && \cdot \frac{1}{c} \end{aligned}$$

1. $w_i \leftrightarrow w_j$

2. $c w_i$

3. $w_i + c w_j$

Operacje elementarne a rozwiązania

Twierdzenie

Wykonując operacje elementarne na macierzy rozszerzonej układu równań, nie zmieniamy jego rozwiązań.

$$\begin{cases} x+2y+3z=14\\ 2x-y+z=3\\ -x+3y+2z=11\end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&3&14\\2&-1&1&3\\-1&3&2&11\end{array}\right] \xrightarrow[w_3+w_1]{w_2-2w_1} \left[\begin{array}{ccc|c}1&2&3&14\\0&-5&-5&-25\\0&5&5&25\end{array}\right] \xrightarrow{w_2\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)}$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c}1&2&3&14\\0&1&1&5\\0&5&5&25\end{array}\right] \xrightarrow{w_3-5w_2} \left[\begin{array}{ccc|c}1&2&3&14\\0&1&1&5\\0&0&0&0\end{array}\right] \xrightarrow{w_1-2w_2}$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c}1&0&1&4\\0&1&1&5\end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x+z=4\\ y+z=5\end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} x=-z+4\\ y=-z+5\end{cases} \quad z\in\mathbb{R}}$$

Np. $z=2$

$x=2$

$y=3$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} x=2\\ y=3\\ z=2\end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 5 \\ 2x + 2y + 7z = 30 \\ 3x + y + 5z = 25 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & 7 & 30 \\ 3 & 1 & 5 & 25 \end{array}\right] \xrightarrow[u_3 - 3u_1]{u_2 - 2u_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 20 \\ 0 & -2 & 2 & 10 \end{array}\right] \xrightarrow{u_2 \leftrightarrow u_3}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 5 & 20 \end{array}\right] \xrightarrow{u_2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & \boxed{5} & 20 \end{array}\right] \xrightarrow{u_3 \cdot \frac{1}{5}}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 4 \end{array}\right] \xrightarrow[u_1 - u_3]{u_2 + u_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{u_1 - u_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right] \longleftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \\ z = 4 \end{cases}$$