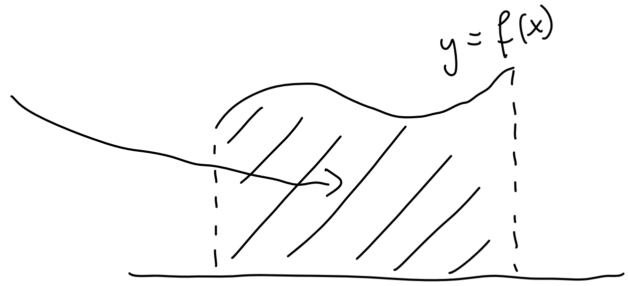
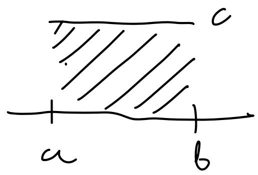
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f$$

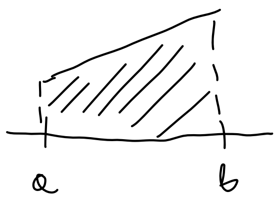


$$\sigma = \sigma(f, P, T) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\,\Delta x_i \xrightarrow{\delta \to 0} \int_a^b f(x)\,dx$$

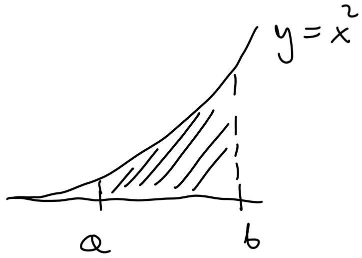
- $\int_a^b c\,dx = c(b-a)$

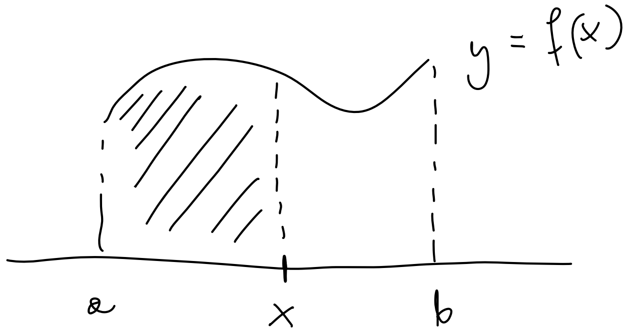


- $\int_a^b x\,dx = \dfrac{b^2 - a^2}{2}$



- $\int_a^b x^2\,dx = \dfrac{b^3 - a^3}{3}$





$x \in [a, b]$

$$F(x) = \int_a^x f = \int_a^x f(t)\,dt$$

$$F : [a, b] \to \mathbb{R}$$

$$F \overset{?}{\rightsquigarrow} f$$

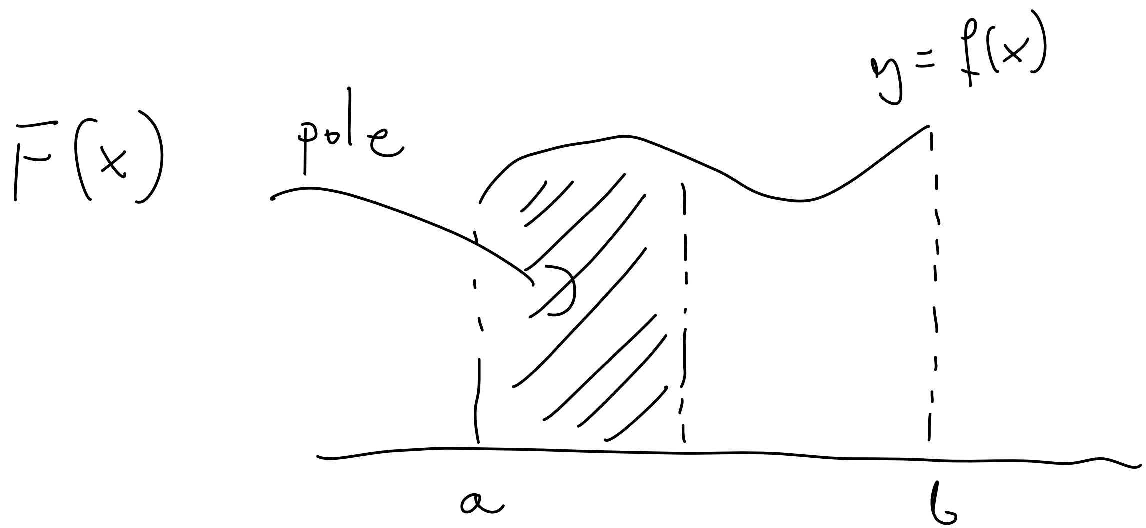
Funkcja górnej granicy całkowania

Twierdzenie

Jeżeli funkcja f jest całkowalna na przedziale $[a, b]$, to funkcja $F\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ dana wzorem

$$F(x) = \int_a^x f, \qquad x \in [a, b]$$

jest ciągła na $[a, b]$.

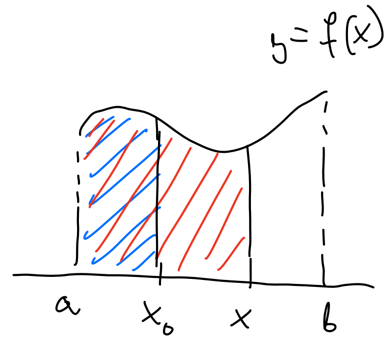


$f \in R[a,b] \Rightarrow F(x) = \int_a^x f$ jest funkcją ciągłą

Chcemy pokazać, że dla dowolnego $x_0 \in [a,b]$ mamy

$$\lim_{x \to x_0} F(x) = F(x_0).$$

- $F(x) - F(x_0) = \underline{\int_a^x f} - \underline{\int_a^{x_0} f} = \int_{x_0}^x f$



$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$$

- Ponieważ f jest całkowalna, to jest ograniczona, więc istnieje $M > 0$, dla którego $\underline{|f(t)| \leq M \text{ dla } t \in [a,b]}$

$$m \leq f \leq M$$
$$\Downarrow$$
$$m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a)$$

- $|F(x) - F(x_0)| = \left| \int_{x_0}^x f \right| \leq M \underbrace{|x - x_0|}_{\xrightarrow{x \to x_0} 0}$

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} |F(x) - F(x_0)| = 0$$

✓

$f \in R[a,b] \Rightarrow F$ jest cg.

$f \in$? $\Rightarrow F$ jest ?

cg. ? różniczkowalna ?

Funkcja górnej granicy całkowania

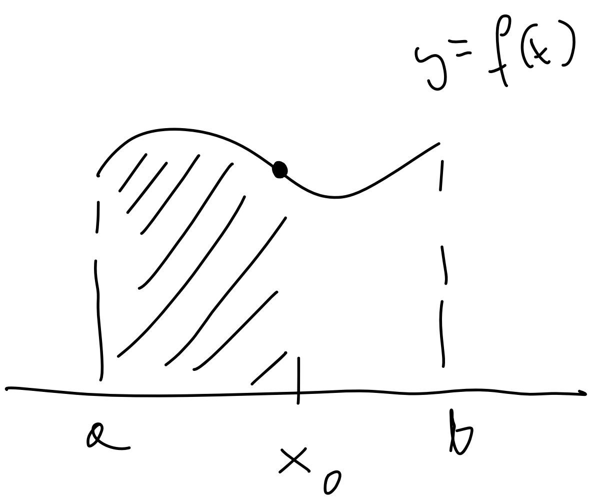
Twierdzenie

Jeżeli funkcja f jest całkowalna na $[a, b]$ i ciągła w punkcie $x_0 \in [a, b]$, to funkcja F dana wzorem

$$F(x) = \int_a^x f, \qquad x \in [a, b]$$

jest różniczkowalna w punkcie x_0 i

$$F'(x_0) = f(x_0).$$



$f \in R[a,b]$, f ciągła w x_0 $\Rightarrow$ $F'(x_0) = f(x_0)$

- Chcemy pokazać, że

$$\lim_{x\to x_0} \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = f(x_0).$$

- $$\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$$

- $$\left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - f(x_0)\right| = \left|\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt - f(x_0)\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt - \underbrace{\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^{x} f(x_0)\,dt}_{= f(x_0)}\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^{x} (f(t)-f(x_0))\,dt\right| = \frac{1}{|x-x_0|}\left|\int_{x_0}^{x}(f(t)-f(x_0))\,dt\right|$$

- Ponieważ f jest ciągła w pkt. x_0, to

$$\bigwedge_{\varepsilon>0}\bigvee_{\eta>0} |t-x_0|<\eta \Rightarrow |f(t)-f(x_0)|<\varepsilon$$

- $$\left|\int_{x_0}^{x}(f(t)-f(x_0))\,dt\right| \leq \varepsilon|x-x_0|$$

$$\Rightarrow \left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - f(x_0)\right| \leq \frac{1}{\cancel{|x-x_0|}}\cdot\varepsilon\cancel{|x-x_0|} = \varepsilon$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to x_0}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = f(x_0) \quad \Big\} \; F'(x_0) = f(x_0)$$

Jeśli f jest ciągła na przedziale $[a, b]$, to

$$\left(\int_a^x f(t)\,dt \right)' = f(x), \quad x \in [a, b].$$

$$F'(x) = f(x), \quad x \in [a, b]$$

$$\boxed{F' = f}$$

Funkcja pierwotna

Jeżeli dla funkcji f zdefiniowanej na dowolnym przedziale I istnieje taka funkcja F określona i różniczkowalna na przedziale I, że

$$F'(x) = f(x), \qquad x \in I,$$

to nazywamy ją **funkcją pierwotną** funkcji f na przedziale I.

$f(x) = \sin x \qquad F(x) = -\cos x$

$f(x) = x \qquad F(x) = \frac{x^2}{2}$

$\Rightarrow$ Jeśli f jest ciągła, to $\int_a^x f(t)\,dt$ jest funkcją pierwotną f.

Twierdzenie Newtona-Leibniza

Jeżeli F jest funkcją pierwotną funkcji ciągłej f na przedziale $[a, b]$, to

$$\int_a^x f = F(x) - F(a)$$

dla każdego $x \in [a, b]$.

- $F'(x) = f(x)$
- $\left(\int_a^x f\right)' = f(x)$

$\Rightarrow \left(F(x) - \int_a^x f\right)' = f(x) - f(x) = 0$, $x \in [a,b]$

$\Rightarrow F(x) - \int_a^x f$ jest funkcją stałą na $[a,b]$

$$\underbrace{F(x) - \int_a^x f = C}$$

Dla $x = a$: $F(a) - \underbrace{\int_a^a f}_{0} = C \Rightarrow C = F(a)$

$$\boxed{F(x) - \int_a^x f = F(a)}$$

Wzór N-L dla $x = b$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \boxed{F(b) - F(a)},$$

gdzie F jest funkcją pierwotną f.

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b \overset{\text{oz.}}{=} F(b) - F(a)$$

Jak w praktyce znaleźć F, znając f?

Funkcje pierwotne i całka nieoznaczona

Zbiór wszystkich funkcji pierwotnych funkcji f oznaczamy przez

$$\int f(x)\,dx \qquad \text{lub} \qquad \int f$$

i nazywamy **całką nieoznaczoną** funkcji f.

$$\int f(x)dx = \{F : F'(x) = f(x)\}$$

$$(-\cos x)' = \sin x$$

$$\Downarrow$$

$$-\cos x \in \int \sin x\,dx$$

Własności całki nieoznaczonej

Jeżeli F jest funkcją pierwotną funkcji f, to $\int f(x)\,dx$ składa się ze wszystkich funkcji G postaci $G(x) = F(x) + C$, gdzie C jest dowolną liczbą rzeczywistą.

$$\Rightarrow \quad \int \sin x \, dx = \{ -\cos x + C : C \in \mathbb{R} \}$$

jeśli $F' = f$ i $G' = f$, to

$$(G - F)' = 0 \Rightarrow G - F \text{ jest f. stała}$$

$$\Rightarrow G - F = C$$

$$\Rightarrow G(x) = F(x) + C.$$

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

- $\int \sin x \, dx = -\cos x + C, \quad C \in \mathbb{R} \iff (\cos x)' = -\sin x$
- $\int e^x \, dx = e^x + C \iff (e^x)' = e^x$
- $\boxed{\int x \, dx = \frac{x^2}{2} + C} \iff \left(\frac{x^2}{2}\right)' = x$
- $\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \operatorname{arctg} x + C \iff (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$

$$\int_a^b x \, dx \overset{N-L}{=} \frac{x^2}{2}\Big|_a^b = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$$

$$\begin{tikzcd} f \arrow[r, bend left, "(\ )'"] & f' \arrow[l, bend left, "\int(\ )"] \end{tikzcd}$$

Całki funkcji elementarnych

$\rightsquigarrow$ $$\int 0\,dx = C,$$

$\rightsquigarrow$ $$\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C$$

$\boxed{a \neq -1}$

$\rightsquigarrow$ $$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$\rightsquigarrow$ $$\int \mathrm{e}^x\,dx = \mathrm{e}^x + C$$

$\rightsquigarrow$ $$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$\rightsquigarrow$ $$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$\rightsquigarrow$ $$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$\rightsquigarrow$ $$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$$

$\rightsquigarrow$ $$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$

$\rightsquigarrow$ $$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x + C$$

$\rightsquigarrow$ $$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$

Liniowość całki nieoznaczonej

Twierdzenie

Jeżeli funkcje f i g mają funkcje pierwotne, to

$$\int (f+g) = \int f + \int g$$

oraz

$$\int cf = c\int f, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

- $(f+g)' = f' + g' \iff \boxed{\int(f+g) = \int f + \int g}$
- $(cf)' = cf' \iff \int cf = c\int f$

$$\int (2e^x - 3\cos x)\,dx = 2\int e^x dx - 3\int \cos x =$$

$$= 2e^x - 3\sin x + C$$

$$\int fg = \dots ?$$

$$\int \frac{f}{g} = \dots ?$$

$$\int f(g) = \dots ?$$

$$(fg)' = f'g + fg' \Rightarrow fg = \int f'g + \int fg'$$

$$\int fg = ?$$

- $(f+g)'$
- $(fg)'$
- $\left(\frac{f}{g}\right)'$ $= \dots$
- $(f(g))'$

$$\begin{tikzcd} f \arrow[r, bend left] & f' \arrow[l, bend left] \end{tikzcd}$$

$$\int f+g = \dots$$

$$\int cf = \dots$$

Całkowanie przez części

Jeżeli funkcje f i g mają ciągłe pochodne, to

$$\int f'g = fg - \int fg'.$$

$$(fg)' = f'g + fg' \iff fg = \int f'g + \int fg'$$

$$\iff \boxed{\int f'g = fg - \int fg'}$$

$$\bullet \quad \int x e^x \, dx = \int \underbrace{(e^x)'}_{f} \, \underbrace{x}_{g} \, dx =$$

$$= e^x x - \int e^x (x)' \, dx =$$

$$= x e^x - \int e^x \cdot 1 \, dx = x e^x - \int e^x \, dx$$

$$= x e^x - e^x + C$$

Sprawdzenie: $(x e^x - e^x + C)' = \cancel{e^x} + x e^x - \cancel{e^x} = x e^x.$

$$\bullet \quad \int x^2 \cos x \, dx = \int x^2 (\sin x)' \, dx = x^2 \sin x - \int \underbrace{(x^2)'}_{= 2x} \sin x \, dx$$

$$= x^2 \sin x - 2 \int x \sin x \, dx = (*)$$

$$\int x \sin x \, dx = \int x (-\cos x)' \, dx = -x \cos x + \int (x)' \cos x \, dx$$

$$= -x \cos x + \int \cos x \, dx = -x \cos x + \sin x + C$$

$$(*) = x^2 \sin x + 2 x \cos x - 2 \sin x + C$$

$$\bullet \quad \int \ln x \, dx = \int 1 \cdot \ln x \, dx = \left| \begin{array}{ll} du = 1 & v = \ln x \\ u = x & dv = \frac{1}{x} \end{array} \right|$$

$$= x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx =$$

$$= x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C$$

$$(f \circ g)' = f'(g) \cdot g'$$

ισότητα, αν υπάρχει το ολοκλήρωμα

$$\int f(t)\,dt = F(t) + C$$

$$(F(g))' = F'(g) \cdot g' = f(g) \cdot g'$$

$$\Leftrightarrow \quad F(g(x)) = \underbrace{\int f(g(x)) \cdot \underline{g'(x)}\,dx}$$

$$\int f(t)\,dt = \int f(g(x))\,g'(x)\,dx \quad , \quad t = g(x)$$

Całkowanie przez podstawienie

Załóżmy, że funkcja f jest ciągła oraz $\int f = F$. Niech g i g' będą funkcjami ciągłymi. Jeżeli istnieje złożenie $f \circ g$, to

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x)) + C.$$

$$\left[F(g(x))\right]' = F'(g(x)) \cdot g'(x) =$$

$$= f(g(x)) \cdot g'(x)$$

- $\int (2x+3)^5 dx = \left| \begin{array}{l} t = 2x+3 \quad | ()' \\ 1dt = 2dx \\ \frac{1}{2}dt = dx \end{array} \right| =$

$= \int t^5 \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \int t^5 dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^6}{6} + C =$

$= \frac{1}{12}(2x+3)^6 + C$

- $\int \frac{1}{\sqrt{2-x^2}} dx = \int \frac{dx}{\sqrt{2}\sqrt{1-\frac{x^2}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}} =$

$= \left| \begin{array}{l} t = \frac{x}{\sqrt{2}} \\ dt = \frac{1}{\sqrt{2}} dx \end{array} \right| = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t + C =$

$= \arcsin \frac{x}{\sqrt{2}} + C$

- $\int \frac{e^{1/x}}{x^2} dx = \left| \begin{array}{l} t = \frac{1}{x} \\ dt = -\frac{1}{x^2} dx \\ -dt = \frac{1}{x^2} dx \end{array} \right| = \int e^t (-1) dt = -e^t + C =$

$= -e^{\frac{1}{x}} + C$

- $\int e^{\frac{1}{x}} dx = ???$

- $\int \sin^3 x\,dx = \int \sin^2 x \sin x\,dx = \int (1-\cos^2 x)\sin x\,dx =$

$$= \left| \begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = -\sin x\,dx \end{array} \right| = \int (1-t^2)(-1)\,dt =$$

$$= -\int (1-t^2)\,dt = -\int dt + \int t^2\,dt =$$

$$= -t + \frac{t^3}{3} + C =$$

$$= -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C$$

- $\int \operatorname{arctg} x\,dx = \int (x)' \operatorname{arctg} x\,dx =$

$$= x \operatorname{arctg} x - \int x (\operatorname{arctg} x)'\,dx =$$

$$= x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx$$

$$= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$$

$$\int \frac{x}{1+x^2}\,dx = \left| \begin{array}{l} t = x^2+1 \\ dt = 2x\,dx \\ \frac{1}{2}dt = x\,dx \end{array} \right| = \int \frac{\frac{1}{2}dt}{t} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|t| + C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|1+x^2| + C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$$