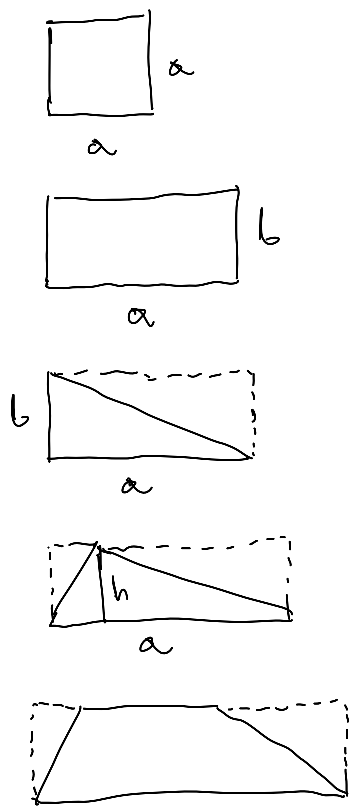
Rachunek całkowy

Pole?



a^2

ab

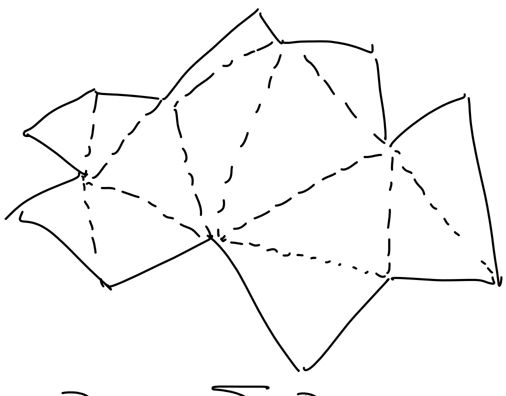
$\Downarrow$

$\frac{1}{2}ab$

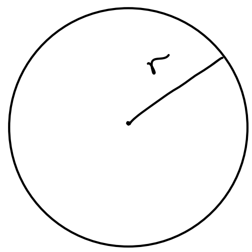
$\Downarrow$

$\frac{1}{2}ah$

$\Downarrow$



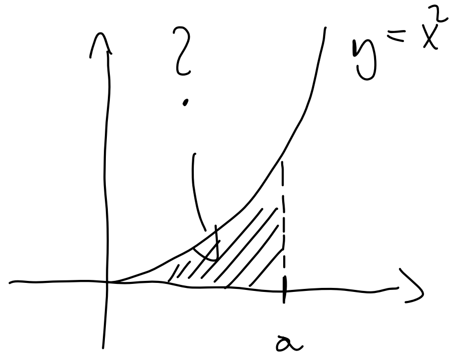
$P = \sum P_\Delta$

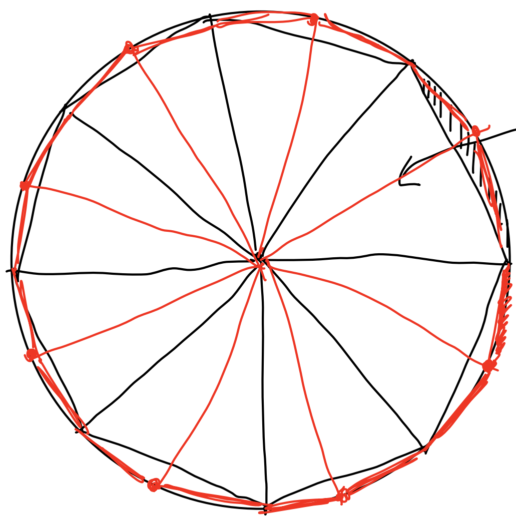


?

πr^2

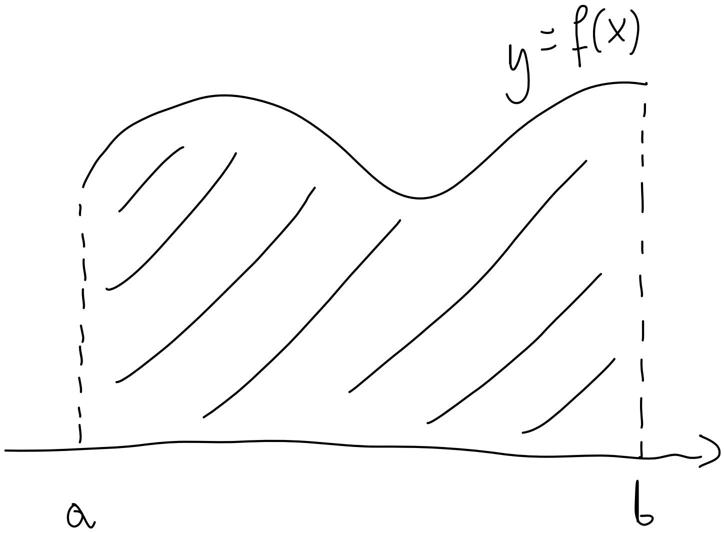
?

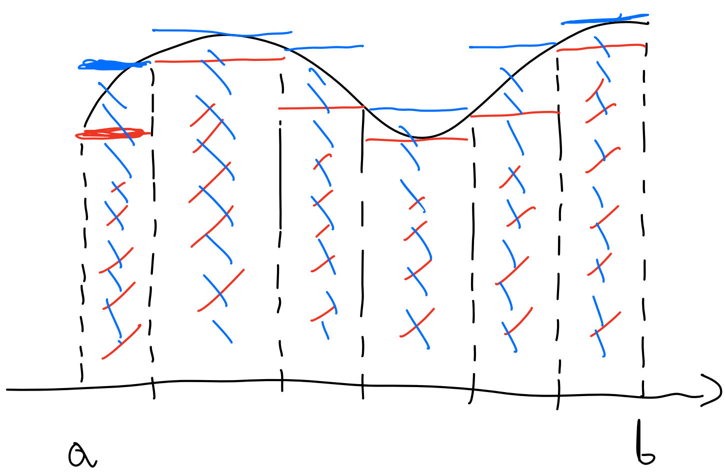




To pole tracimy

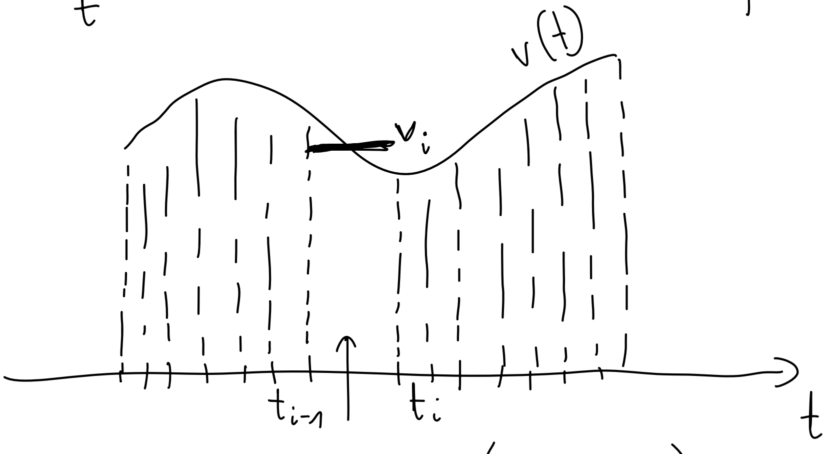
$$P_{O} \approx \sum P_{\Delta}$$





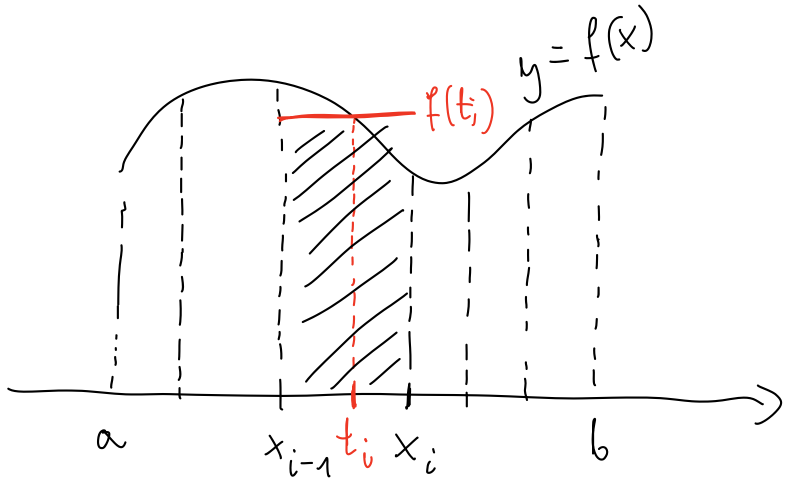
$$P \le P \le P$$

$v_{śr} = \frac{s}{t}$ $\quad$ $s = v \cdot t$ ← przy stałej prędkości



$s = ?$ $\quad$ $s_i = v_i \cdot (t_i - t_{i-1})$

$$s = \sum v_i (t_i - t_{i-1})$$



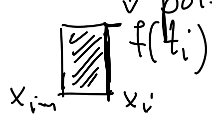
$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ ← podział P odcinka $[a,b]$

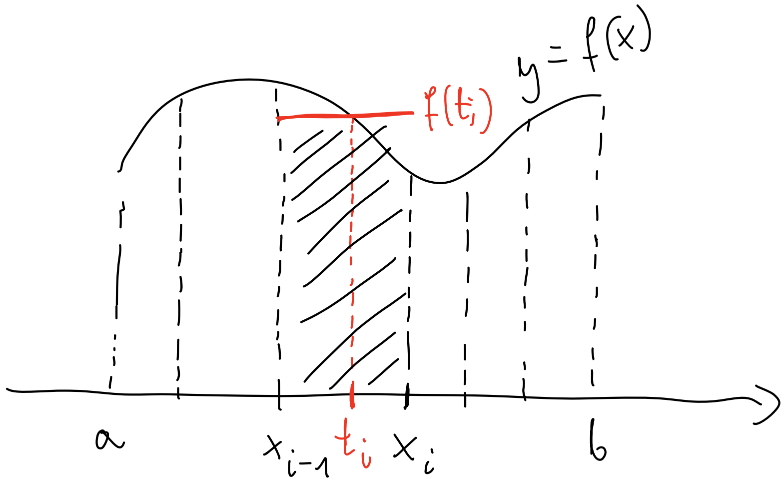
$t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ ← punkty pośrednie

$t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ $\quad$ T – zb. punktów pośrednich

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(t_i) \cdot \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{\Delta x_i} = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{f(t_i)\,\Delta x_i}_{\text{pole}}$$

sumy całkowe





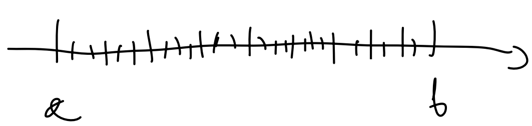
$$\sigma = \sigma(f, P, T) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\,\Delta x_i$$

Średnica podziału

$$\delta = \max_{1 \le i \le n} \Delta x_i$$

$(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ciąg podziałów

Ciąg $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nazywamy <u>normalnym</u>, jeżeli ciąg średnic $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny do 0.



T_n – zbiór punktów pośrednich dla n-tego podziału

$$\sigma_n = \sigma(f, P_n, T_n)$$

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n \;?$$

Całka Riemanna (całka oznaczona)

Jeżeli funkcja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest ograniczona oraz dla dowolnego ciągu normalnego podziałów $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ przy dowolnym wyborze punktów pośrednich T_n ciąg sum

podziały są coraz drobniejsze

$$\sigma_n = \sigma_n(f, P_n, T_n)$$

jest zbieżny do tej samej granicy, to mówimy, że funkcja f jest **całkowalna** w sensie Riemanna na przedziale $[a, b]$. Fakt ten zapisujemy w postaci

$$f \in \mathcal{R}[a, b],$$

a wartość wspólnej granicy oznaczamy przez

$$\int_a^b f(x)\, dx \qquad \text{lub} \qquad \int_a^b f$$

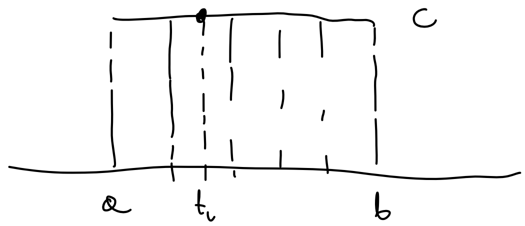
S

$$\sigma = \sum f(t_i) \Delta x_i$$

Primeri.

1. $f:[a,b] \to \mathbb{R}$, $\quad f(x) = c$, $\quad x \in [a,b]$

$$\int_a^b f = \int_a^b c\,dx = c(b-a)$$



$P \quad a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$

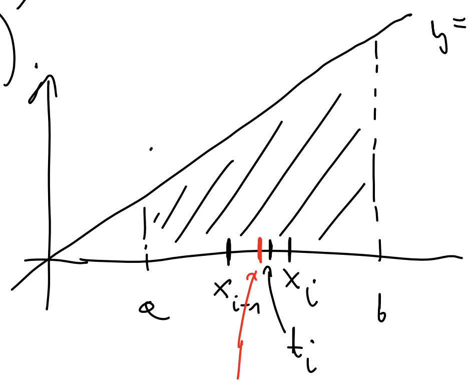
$T \quad t_1 < t_2 < \dots < t_n$

$$\underline{\sigma} = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} c\,\Delta x_i = c\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) =$$

$$= c\left[\cancel{x_1} - x_0 + \cancel{x_2} - \cancel{x_1} + \cancel{x_3} - \cancel{x_2} + \dots + x_n - \cancel{x_{n-1}}\right] =$$

$$= c(x_n - x_0) = c(b-a).$$

2. $f:[a,b] \to \mathbb{R}$, $\quad f(x) = x$



$$\boxed{\int_a^b x\,dx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)}$$

P, T

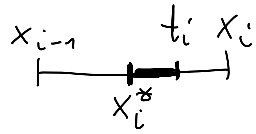
$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} t_i\,\Delta x_i \qquad \frac{x_{i-1} + x_i}{2} = x_i^*$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^*\,\Delta x_i + \boxed{\sum_{i=1}^{n}(t_i - x_i^*)\Delta x_i} \xrightarrow{\delta \to 0} \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$$

meje?

- $$\sum_{i=1}^{n} x_i^*\,\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_{i-1} + x_i}{2}\cdot(x_i - x_{i-1}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - x_{i-1}^2)$$

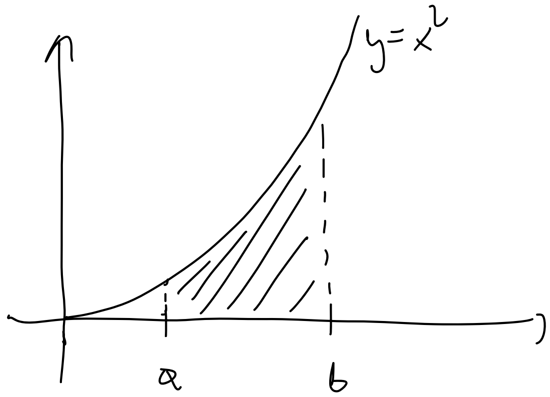
$$= \frac{1}{2}(x_n^2 - x_0^2) = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$$



$$\left|\sum_{i=1}^{n}(t_i - x_i^*)\Delta x_i\right| \le \sum_{i=1}^{n} \underbrace{|t_i - x_i^*|}_{\le \frac{1}{2}\Delta x_i}\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}\Delta x_i \cdot \underbrace{\Delta x_i}_{\le \delta} \le$$

$$\le \frac{1}{2}\delta \sum_{i=1}^{n}\Delta x_i = \frac{1}{2}\delta(b-a) \xrightarrow{\delta \to 0} 0.$$

3. $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$



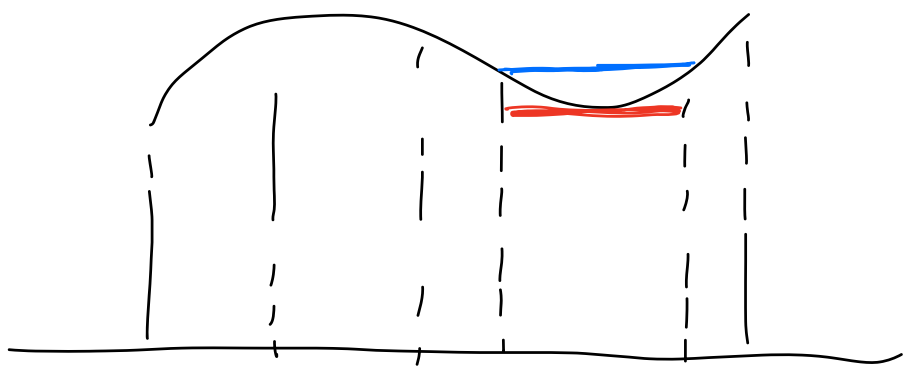
$$\sigma=\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n} t_i^2\Delta x_i=\underbrace{\sum_{i=1}^{n}(x_i^*)^2\Delta x_i}_{?}+\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\left(t_i^2-(x_i^*)^2\right)\Delta x_i}$$

CH.

Funkcje ciągłe są całkowalne

Twierdzenie

Jeżeli funkcja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest ciągła, to jest ona całkowalna.



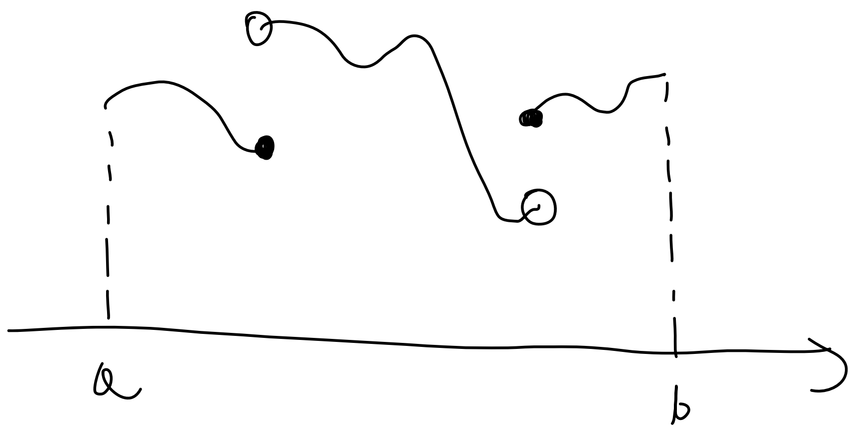
$$\sigma = \sum f(t_i)\Delta x_i \quad \rightsquigarrow \quad \sum (M_i - m_i)\Delta x_i$$

$$M_i = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) \qquad m_i = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$$

Funkcje ciągłe są całkowalne

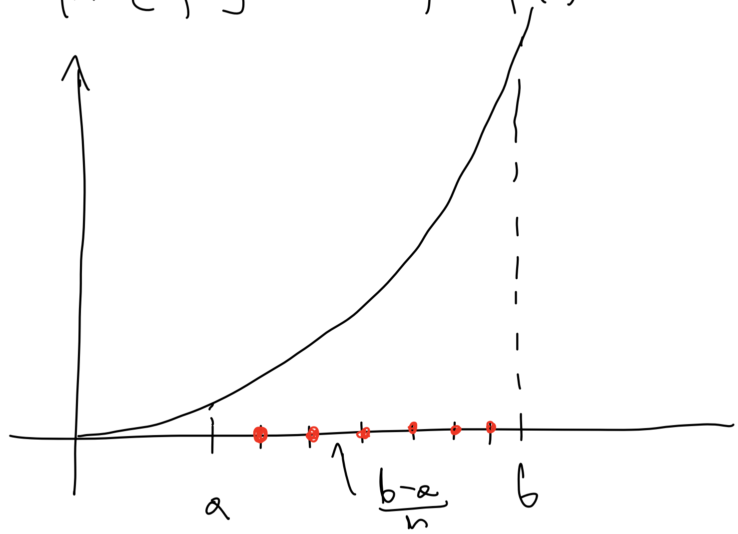
Twierdzenie

Jeżeli funkcja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ma skończenie wiele punktów nieciągłości, to jest ona całkowalna.



f jest całkowalna $\iff$ zbiór jej punktów nieciągłości nie jest „zbyt duży".

3. $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$



$$a+n\underbrace{\frac{b-a}{n}}_{h} = b$$

$n\in\mathbb{N}$ $\qquad h=\dfrac{b-a}{n}$ $\qquad a=x_0<\underset{x_1}{\underset{\shortparallel}{a+h}}<\underset{x_2}{\underset{\shortparallel}{a+2h}}<\dots<a+nh$ ...

$$\underset{a+h}{\underset{\shortparallel}{t_1}}<\underset{a+2h}{\underset{\shortparallel}{t_2}}<\dots<\underset{b=a+nh}{\underset{\shortparallel}{t_n}}$$

$$\sigma=\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\,\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}(a+ih)^2\cdot h = h\sum_{i=1}^{n}\left(a^2+2aih+i^2h^2\right)$$

$$=ha^2\sum_{i=1}^{n}1+2ah^2\sum_{i=1}^{n}i+h^3\sum_{i=1}^{n}i^2=$$

$$=h\cdot a^2\cdot n+2ah^2\frac{n(n+1)}{2}+h^3\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=$$

$$=\underbrace{a^2\frac{b-a}{\cancel{n}}\cdot\cancel{n}}_{\substack{\downarrow n\to\infty\\ a^2(b-a)}}+\underbrace{a\frac{(b-a)^2}{n^2}\cdot n(n+1)}_{\substack{\downarrow n\to+\infty\\ a(b-a)^2}}+\underbrace{\frac{(b-a)^3}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}_{\substack{\downarrow n\to+\infty\\ \frac{(b-a)^3}{3}}}$$

$$\xrightarrow{n\to+\infty} a^2(b-a)+a(b-a)^2+\frac{(b-a)^3}{3}=$$

$$=(b-a)\left[\cancel{a^2}+ab-\cancel{a^2}+\frac{(b-a)^2}{3}\right]=\frac{b-a}{3}\left[\overbrace{\cancel{3ab}}^{ab}+b^2-\cancel{2ab}+a^2\right]=$$

$$=\frac{1}{3}\left[b^3+\cancel{ab^2}+\cancel{ba^2}-\cancel{ab^2}-\cancel{a^2b}-a^3\right]=\frac{b^3-a^3}{3}.$$

Własności całki

Twierdzenie

Jeżeli funkcje f, g są całkowalne na przedziale $[a, b]$, to całkowalna jest ich suma oraz

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

$$\sigma = \sigma(f+g, P, T) = \sigma(f, P, T) + \sigma(g, P, T)$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow \delta \to 0 & \downarrow \delta \to 0 & \downarrow \delta \to 0 \\ \int_a^b (f+g) & \int_a^b f & \int_a^b g \end{array}$$

Własności całki

Twierdzenie

Jeżeli funkcja f jest całkowalna na przedziale $[a, b]$ oraz $c \in \mathbb{R}$, to całkowalna jest funkcja cf oraz

$$\int_a^b cf = c \int_a^b f .$$

$$\underbrace{\sigma(cf, P, T)}_{\substack{\big\downarrow\ \delta \to 0 \\ \int_a^b cf}} = c\,\underbrace{\sigma(f, P, T)}_{\substack{\big\downarrow\ \delta \to 0 \\ \int_a^b f}}$$

$$\int_a^b f\cdot g = \dots ?$$

$$\sigma(fg, P, T) = \sum f(t_i)\, g(t_i)\, \Delta x_i \stackrel{?}{=} \sum f(t_i) \cdot \sum g(t_i)$$

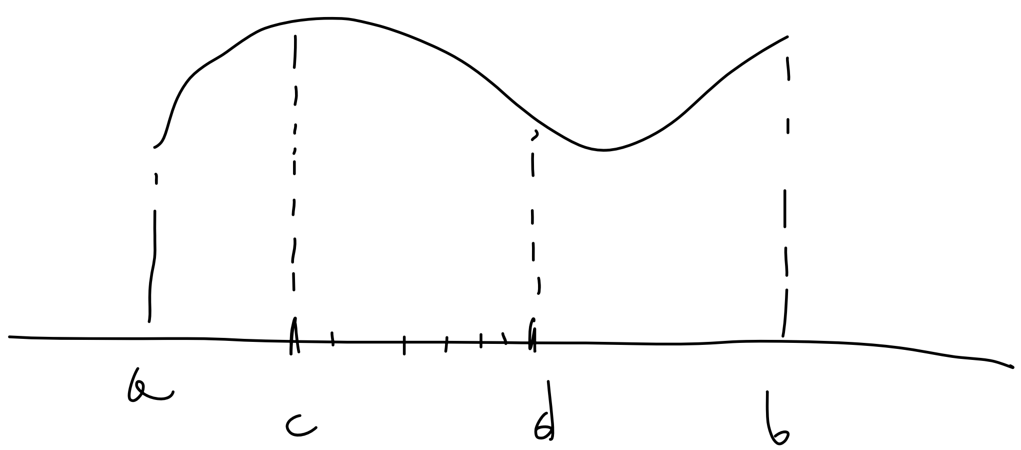
$$\int_a^b \frac{f}{g} = \dots ?$$

$$\sigma\left(\frac{f}{g}, P, T\right) = \sum \frac{f(t_i)}{g(t_i)} \Delta x_i$$

Własności całki

Twierdzenie

Jeżeli funkcja f jest całkowalna na przedziale $[a, b]$ oraz $[c, d]$ jest podprzedziałem $[a, b]$, to f jest całkowalna na przedziale $[c, d]$.

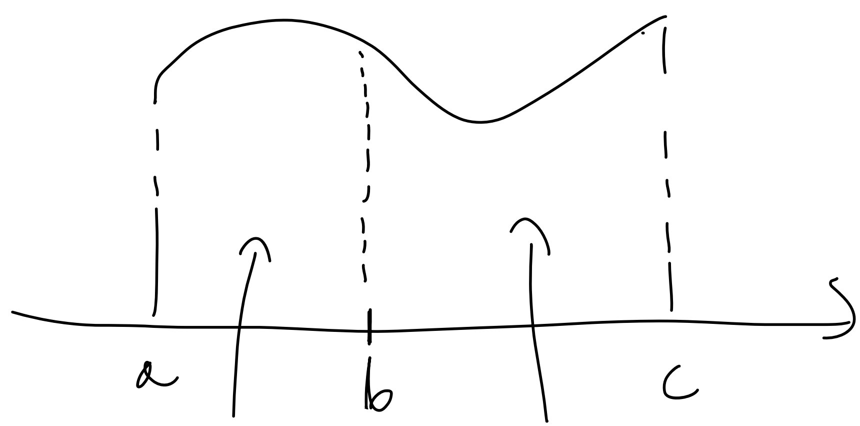


Własności całki

Twierdzenie (Addytywność całki względem drogi całkowania)

Jeżeli funkcja f jest całkowalna na przedziale $[a, c]$ oraz $\cancel{c}\ b \in [a, \cancel{b}\ c]$, to

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f.$$



$$\underbrace{\int_a^b f + \int_b^c f}_{= \int_a^c f}$$

Granice całkowania

Jeżeli funkcja f jest całkowalna na przedziale $[a, b]$, to definiujemy

$$\int_b^a f = -\int_a^b f.$$

- $\int_a^a f = 0$

1 cz.

- $\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$ o ile f jest całkowalna na przedziale

$$\left[\min(a,b,c),\ \max(a,b,c)\right]$$

Własności całki

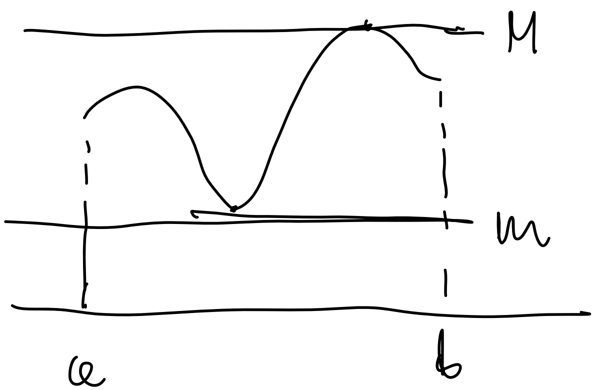
Twierdzenie

Jeżeli funkcja f jest całkowana na przedziale $[a, b]$ oraz

$$m \leqslant f(x) \leqslant M, \qquad x \in [a, b]$$

dla pewnych stałych $m, M \in \mathbb{R}$, to

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f \leqslant M(b-a).$$



$$\sum_{i=1}^{n} m \Delta x_i \leq \sigma = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{f(t_i)}_{m \leq \quad \leq M} \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} M \Delta x_i$$

$$\sigma(m, P, T) \qquad \qquad \sigma(M, P, T)$$

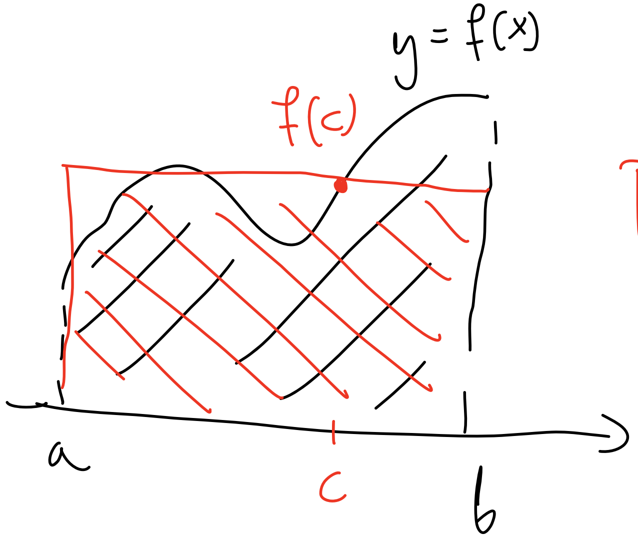
$$\int_a^b m = m(b-a) \qquad \int_a^b f \qquad \int_a^b M = M(b-a)$$

Własności całki

Twierdzenie (Twierdzenie o wartości średniej)

Jeżeli funkcja f jest ciągła na przedziale $[a, b]$, to istnieje takie $c \in [a, b]$, że

$$\underbrace{\frac{1}{b-a}\int_a^b f}_{\text{wartość średnia funkcji na przedziale } [a,b]} = f(c).$$



$P = P$

$$\int_a^b f = \underbrace{f(c)\cdot(b-a)}$$