$f: I \to \mathbb{R}$, $\quad x, x_0 \in I$, $\quad x \neq x_0$

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}_{\text{Wielomian Taylora}}$$

leży między x a x_0

$$+ \underbrace{R_n(x, x_0)}_{\text{Reszta}} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

$f^{(k)}$ – ciągłe na I dla $k = 0, \ldots, n$

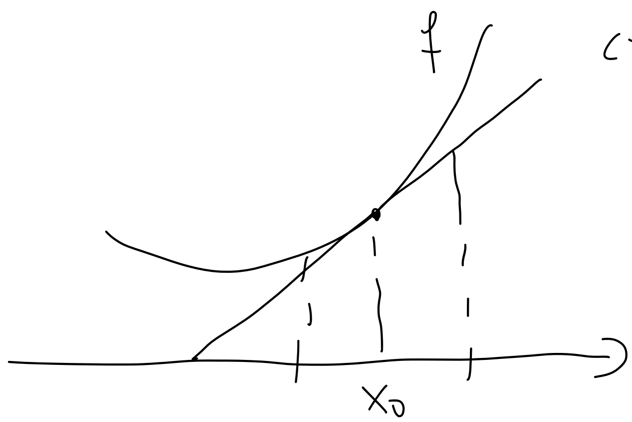
$f^{(n+1)}$ – istnieje na I

Tw. Lagrange'a $\qquad c \in (a,b)$

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) \iff f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$$

$$\iff \underset{x}{f(b)} = \underset{x_0}{f(a)} + f'(c)(b-a)$$

$$\iff \underbrace{f(x) = f(x_0) + f'(c)(x-x_0)}_{\text{Wzór Taylora dla } n=0}$$



$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

$n = 1$

$$\underbrace{f(x)}_{\uparrow} = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)}_{\uparrow} + \underbrace{\frac{f''(c)}{2!}(x-x_0)^2}$$

---

1. $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$, $x_0 = 0$

$f^{(k)}(x) = e^x$ $\qquad f^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(0) = 1$

$$e^x = \underbrace{1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots + \frac{1}{n!}x^n} + \underbrace{\frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}}$$

$\downarrow n \to +\infty$

$$e^3 \simeq 1 + 3 + \frac{3^2}{2!} + \frac{3^3}{3!} + \dots + \frac{3^n}{n!} \qquad 0 , \ x \in \mathbb{R}$$

2. $\sin 1 = ?$

$f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$, $x_0 = 0$

$$\sin x = \boxed{x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}} + R_{2n+1}(x,0)$$

$$\sin 1 \simeq 1 - \frac{1}{6}1^3 + \frac{1}{120}1^5 - \dots$$

$n = 4$ $\qquad -1 \le \cdot \le 1$

$$\sin 1 = 1 - \frac{1}{6} + \boxed{\frac{\cos c}{120}} , \qquad c \in (0,1)$$

$$\downarrow$$

$$| \ | \le \frac{1}{120} < \frac{1}{100}$$

$$\sin 1 \approx 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6} = 0,8333\dots$$

$\parallel$ $0,8414\dots$

3. $f(x) = \ln x$, $x > 0$, $x_0 = 1$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \quad f''(x) = \frac{-1}{x^2}, \quad f'''(x) = \frac{2}{x^3}, \quad f^{(4)}(x) = \frac{-6}{x^4}, \dots$$

$$f^{(k)}(x) = (-1)^{k+1 \bmod 2} \frac{(k-1)!}{x^k}$$

$$\ln x = \ln 1 + \frac{\frac{1}{1}}{1!}(x-1)^1 + \frac{\frac{-1}{1}}{2!}(x-1)^2 + \frac{\frac{2}{1}}{3!}(x-1)^3 + \frac{\frac{-3!}{1}}{4!}(x-1)^4 + \dots + R_n(x,1)$$

$$= x - 1 - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \dots$$

$$\ln\frac{3}{2} \cong \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{24} - \frac{1}{64} \approx 0.\underbrace{40}1041(6)$$

$\parallel$ $0.\underbrace{40}5465\dots$

Ekstrema

f, f' $\quad f'(x) = 0 \iff x_0, x_1, x_2, \dots$

		x_0	
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	max lok.	$\searrow$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(c)}{2!}(x - x_0)^2$$

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f''(c)}{2!}\overbrace{(x - x_0)^2}^{\geq 0}$$

Warunek dostateczny istnienia ekstremum

Załóżmy, że

- funkcja f ma w pewnym otoczeniu punktu x_0 pochodną f' oraz istnieje druga pochodna $f''(x_0)$.

Jeżeli

$$f'(x_0) = 0 \qquad \text{oraz} \qquad f''(x_0) \neq 0,$$

to funkcja f ma w punkcie x_0 ekstremum lokalne właściwe: **maksimum**, gdy $f''(x_0) < 0$, a **minimum**, gdy $f''(x_0) > 0$.

! Nie musimy badać znaku f' na przedziałach!

$f(x) = x^2$

$f'(x) = 2x \quad f'(x) = 0 \iff x = 0$

$f''(x) = 2$

$f''(0) = 2 > 0 \Rightarrow$ w 0 jest min. lok.

$f''(x_0) = 0$

$\Downarrow$

?

Warunek dostateczny istnienia ekstremum

Załóżmy, że

- funkcja f ma w pewnym otoczeniu punktu x_0 pochodne do rzędu $n-1$, a pochodna $f^{(n)}(x_0)$ istnieje.

Jeżeli

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \qquad \text{oraz} \qquad f^{(n)}(x_0) \neq 0$$

i n jest liczbą **parzystą**, to funkcja f ma w punkcie x_0 ekstremum lokalne właściwe: **maksimum**, gdy $f^{(n)}(x_0) < 0$, a **minimum**, gdy $f^{(n)}(x_0) > 0$.

Jeżeli liczba n jest nieparzysta, to funkcja nie posiada ekstremum w punkcie x_0.

$f(x) = e^{x} + e^{-x} + 2\cos x \quad , \quad x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = e^{x} - e^{-x} - 2\sin x$

$f'(0) = 1 - 1 - 0 = 0$

Czy w $x_0 = 0$ jest ekstremum?

$f''(x) = e^{x} + e^{-x} - 2\cos x$

$f''(0) = 1 + 1 - 2 = 0$

$f'''(x) = e^{x} - e^{-x} + 2\sin x$

$f'''(0) = 1 - 1 + 0 = 0$

$f^{(4)}(x) = e^{x} + e^{-x} + 2\cos x$

$f^{(4)}(0) = 1 + 1 + 2 = \underline{4} > 0 \Rightarrow$ w $x_0 = 0$ jest minimum lokalne

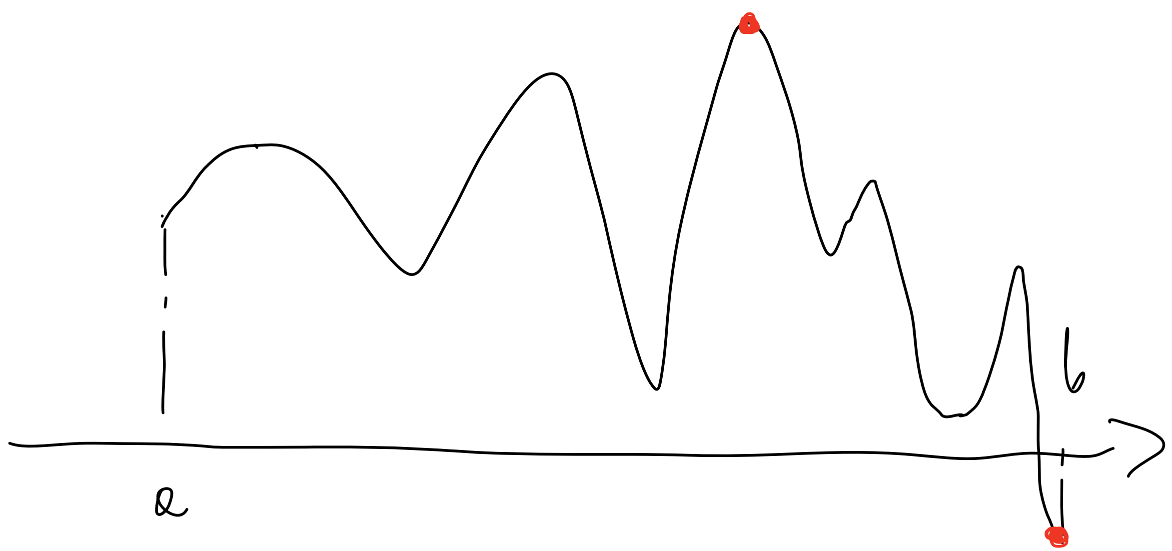
Ekstrema globalne

Mówimy, że funkcja f przyjmuje w punkcie x_0 wartość **najmniejszą**, jeżeli

$$\bigwedge_{x\in D_f} f(x) \geqslant f(x_0).$$

Mówimy, że funkcja f przyjmuje w punkcie x_0 wartość **największą**, jeżeli

$$\bigwedge_{x\in D_f} f(x) \leqslant f(x_0).$$



$f(x) = x^2 \ln x$, $D_f = [\frac{1}{e}, e]$

$f'(x) = 2x\ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x\ln x + x = x(2\ln x + 1)$

$f'(x) = 0 \iff 2\ln x + 1 = 0 \iff \ln x = -\frac{1}{2} \iff$

$\iff x = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$

$\Rightarrow$ Jeśli f ma ekstremum lokalne w $(\frac{1}{e}, e)$, to jest ono osiągnięte w $x_0 = \frac{1}{\sqrt{e}}$.

$\Rightarrow$ Ekstrema globalne mogą wystąpić tylko w pkt. $x_0 = \frac{1}{\sqrt{e}}$, $x_1 = \frac{1}{e}$, $x_2 = e$.

$f(x_0) = \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^2 \ln\frac{1}{\sqrt{e}} = \frac{1}{e}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = \underbrace{-\frac{1}{2e}}$ ← wart. najmniejsza

$f(x_1) = \left(\frac{1}{e}\right)^2 \ln\frac{1}{e} = \frac{1}{e^2}\cdot(-1) = \underbrace{\frac{-1}{e^2}}$

$f(x_2) = e^2 \ln e = \underbrace{e^2}$ ← wart. największa

$e^2 > 2e$

$\frac{1}{e^2} < \frac{1}{2e}$

$-\frac{1}{e^2} > -\frac{1}{2e}$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\ln(e-x) + x - 1} = \left[\frac{1-1}{1+0-1}\right] = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$f(x) = e^x - e^{-x} \quad , \quad g(x) = \ln(e-x) + x - 1$$

$$f'(x) = e^x + e^{-x} \quad , \quad g'(x) = \frac{-1}{e-x} + 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - \underbrace{f(0)}_{=0}}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{g(x) - \underbrace{g(0)}_{=0}}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{g(x)}{x}$$

$$\frac{e^x - e^{-x}}{\ln(e-x) + x - 1} = \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{x}}{\frac{\ln(e-x) + x - 1}{x}} = \frac{\frac{f(x)}{x}}{\frac{g(x)}{x}} \xrightarrow{x \to 0} \frac{f'(0)}{g'(0)}$$

$$\frac{f(x)}{x} \xrightarrow{x \to 0} f'(0) \qquad \frac{g(x)}{x} \xrightarrow{x \to 0} g'(0)$$

$$f'(0) = 1 + 1 = 2$$

$$g'(0) = \frac{-1}{e} + 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\ln(e-x) + x - 1} = \frac{2}{-\frac{1}{e} + 1} = \frac{2e}{e-1}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \overset{?}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Reguła de l'Hospitala

Jeżeli funkcje f i g spełniają warunki:

- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$, przy czym $g(x) \neq 0$ w pewnym otoczeniu x_0 (poza, być może, samym punktem x_0),
- f' i g' istnieją w pewnym otoczeniu x_0 (poza, być może, samym punktem x_0) oraz istnieje granica $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ (właściwa lub niewłaściwa),

to

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

$\left[\dfrac{0}{0}\right]$

$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

Tw. Lagrange'a

$\wedge$

Tw. Cauchy'ego o wart. średniej

Reguła de l'Hospitala

$\frac{f}{g}$

Jeżeli funkcje f i g spełniają warunki:

$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty}$

- $\lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$,
- f' i g' istnieją w pewnym otoczeniu x_0 (poza, być może, samym punktem x_0) oraz istnieje granica $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (właściwa lub niewłaściwa),

to

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

$\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

1. $\lim_{x\to 0^+} x\ln x = [0\cdot(-\infty)] =$

$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{-\infty}{\infty}\right] = 0$

$\lim_{x\to 0^+} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0$

Reguła de l'Hospitala: uwagi

- Obie reguły de l'Hospitala są prawdziwe także dla granic jednostronnych oraz dla granic w $+\infty$ lub w $-\infty$.
- Reguły de l'Hospitala można również wykorzystywać do obliczania granic typu $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 1^∞, ∞^0, 0^0.

$\underline{a > 0}$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^a}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \boxed{0}$$

$$\frac{(x^a)'}{(e^x)'} = \frac{a x^{a-1}}{e^x} \xrightarrow{x\to+\infty} 0, \quad a \in (0,1] \qquad a-1 \leq 0$$

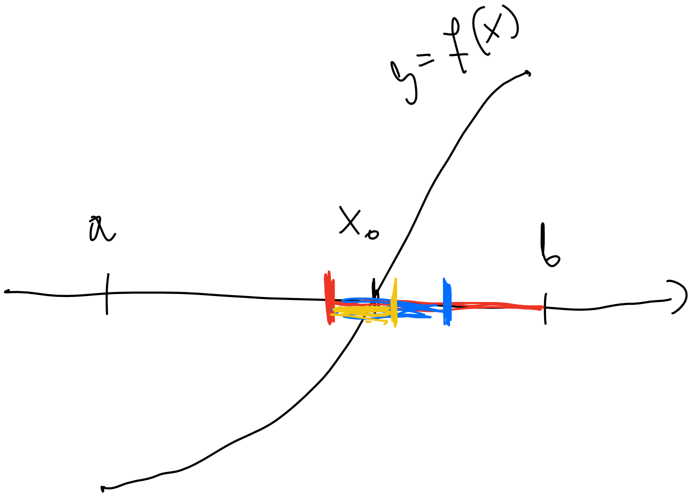
$$\searrow \left[\frac{\infty}{\infty}\right], \quad a > 1$$

$$\frac{(a x^{a-1})'}{(e^x)'} = \frac{a(a-1)x^{a-2}}{e^x} \nearrow 0 \quad a \leq 2$$

$$\searrow \left[\frac{\infty}{\infty}\right], \quad a > 2$$

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0 \quad a > 0}$$

$$\frac{(\ln x)'}{(x^a)'} = \frac{\frac{1}{x}}{a x^{a-1}} = \frac{1}{a x^a} \xrightarrow{x\to+\infty} 0$$

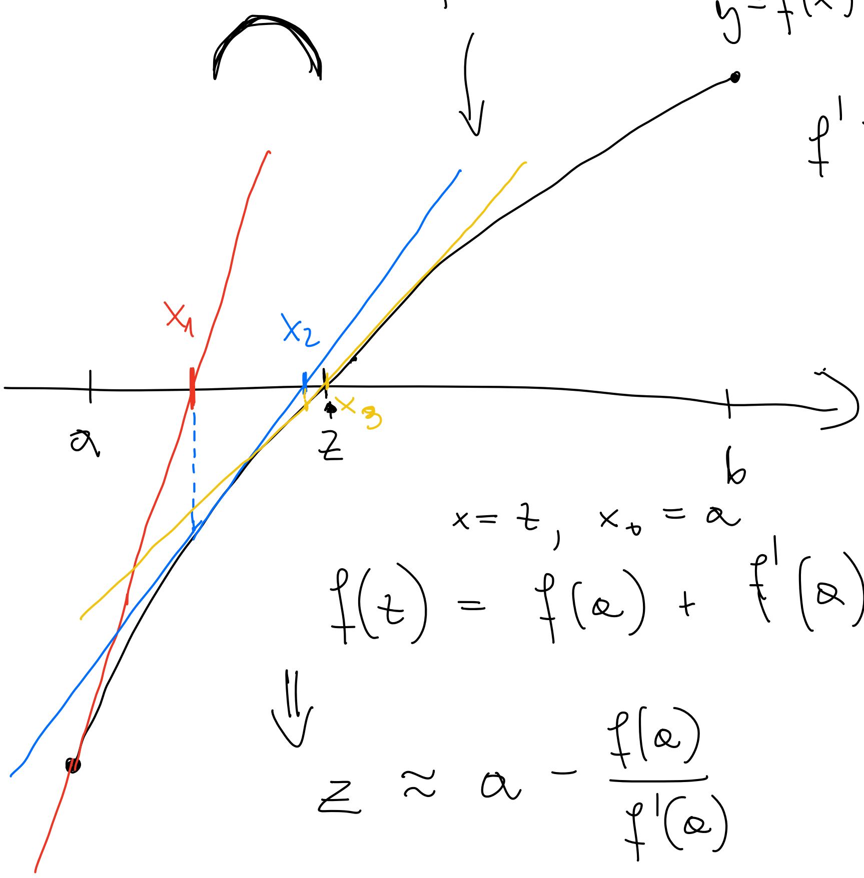


$x_0 = ?$

$$f(x) = 0 \iff x = ?$$

Metoda Newtona (metoda stycznych)

$f'' < 0$



$f' > 0$

$x = t,\ x_0 = a$

$$f(t) = f(a) + f'(a)(t-a) + \frac{f''(c)}{2!}(t-a)^2$$

$$\Downarrow$$

$$z \approx a - \frac{f(a)}{f'(a)}$$