Różniczkowalność a ciągłość

Twierdzenie

Jeżeli funkcja jest różniczkowalna w pewnym punkcie, to jest w tym punkcie ciągła.

Niech $f'(x_0)$ istnieje.

Musimy pokazać, że

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

$$\lim_{x \to x_0}\left(f(x) - f(x_0)\right) = \lim_{x \to x_0} \underbrace{(x - x_0)}_{\substack{\downarrow x \to x_0 \\ 0}} \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\substack{\downarrow x \to x_0 \\ f'(x_0)}} = 0.$$

Algebraiczne własności pochodnej

Twierdzenie

Jeżeli funkcje f i g są różniczkowalne w punkcie x_0, to

- $\rightsquigarrow$ $(c \cdot f)'(x_0) = c \cdot f'(x_0)$ dla dowolnego $c \in \mathbb{R}$,
- $\rightsquigarrow$ $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$,
- $\rightsquigarrow$ $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$,
- $\rightsquigarrow$ $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$.

$$\frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x_0+h)-\left(\frac{f}{g}\right)(x_0)}{h} = \frac{1}{h}\left[\frac{f(x_0+h)}{g(x_0+h)}-\frac{f(x_0)}{g(x_0)}\right] =$$

$$= \frac{1}{h}\,\frac{f(x_0+h)\,g(x_0)-f(x_0)\,g(x_0+h)}{g(x_0+h)\,g(x_0)} =$$

$$= \frac{1}{h}\,\frac{\left(f(x_0+h)-f(x_0)\right)g(x_0)-f(x_0)\left(g(x_0+h)-g(x_0)\right)}{g(x_0+h)\,g(x_0)} =$$

$$= \left[\underbrace{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}_{\xrightarrow{h\to 0}\ f'(x_0)}\,g(x_0)-\underbrace{\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}}_{\xrightarrow{h\to 0}\ g'(x_0)}\cdot f(x_0)\right]\cdot\frac{1}{\underbrace{g(x_0+h)}_{\xrightarrow{h\to 0}\ g(x_0)}\,g(x_0)}$$

$$\xrightarrow{h\to 0}\ \frac{f'(x_0)\,g(x_0)-f(x_0)\,g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

Pochodna funkcji złożonej

Twierdzenie

Jeżeli funkcja g ma pochodną w punkcie x_0, a funkcja f ma pochodną w punkcie $g(x_0)$, to

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0).$$

$$h(x) = f(g(x))$$

$$\frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} =$$

$$= \underbrace{\frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)}}_{\xrightarrow{x \to x_0} f'(g(x_0))} \cdot \underbrace{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}}_{\xrightarrow{x \to x_0} g'(x_0)}$$

$$0 \overset{?}{\neq} g(x) - g(x_0)$$

$$f'(y_0) \text{ istnieje} \Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{f(y_0+h)-f(y_0)}{h} = f'(y_0)$$

$$r(h) = \frac{f(y_0+h)-f(y_0)}{h} - f'(y_0)$$

$$f'(y_0) \text{ istnieje} \equiv \boxed{\lim_{h\to 0} r(h) = 0},$$

$$(r(h)+f'(y_0))h = f(y_0+h) - f(y_0) \quad (**)$$

$$\Rightarrow g(x_0+h) - g(x_0) = (s(h)+g'(x_0))h \qquad \lim_{h\to 0} s(h) = 0$$

$$(*)\ g(x_0+h) = (s(h)+g'(x_0))h + g(x_0)$$

$$\frac{f(g(x_0+h)) - f(g(x_0))}{h} = \Big| \ y_0 = g(x_0) \ \Big|$$

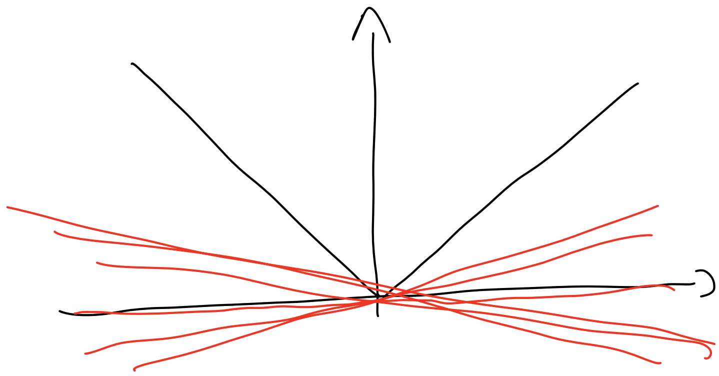
$$\overset{(*)}{=} \frac{1}{h}\Big[f\big(y_0 + (s(h)+g'(x_0))h\big) - f(y_0)\Big]$$

$$= \frac{1}{\cancel{h}}\Big[r\big(\underbrace{(s(h)+g'(x_0))h}_{\substack{\downarrow h\to 0\\ 0}}\big) + f'(y_0)\Big]\big(\underbrace{s(h)}_{\substack{\downarrow h\to 0\\ 0}}+g'(x_0)\big)\cancel{h}$$

$$\downarrow h\to 0 \quad 0$$

$$\xrightarrow{h\to 0} f'(y_0)g'(x_0) = \boxed{f'(g(x_0))g'(x_0)}$$

Czy ciągłość implikuje różniczkowalność ?



$f(x) = |x|$

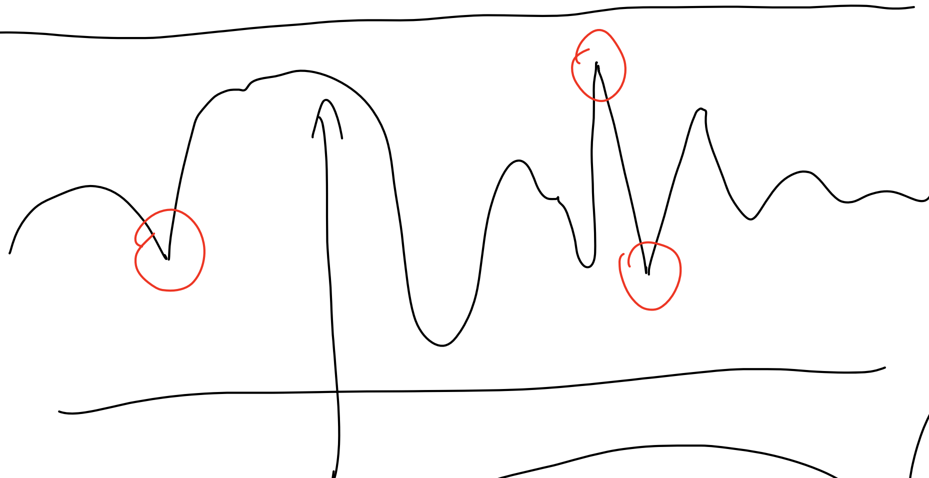
ciągła

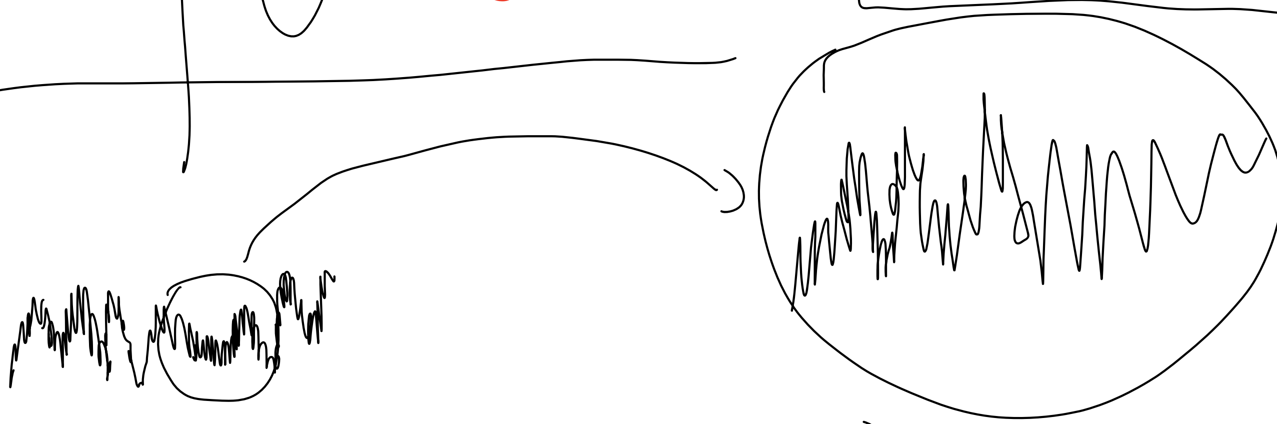
$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{|x|-|0|}{x-0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, & x>0 \\ -1, & x<0 \end{cases}$$

$f'(0)$ nie istnieje

Ruch Browna

NIE!





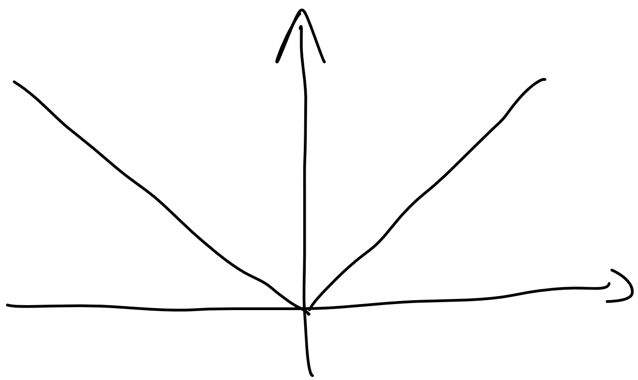
Fakt. Istnieją funkcje ciągłe, które nie posiadają pochodnej w żadnym punkcie.

Pochodne jednostronne

Jeżeli funkcja f jest określona w pewnym otoczeniu lewostronnym punktu x_0, to granicę

$$f'_-(x_0) := \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

o ile istnieje, nazywamy **pochodną lewostronną** funkcji f w punkcie x_0.



$$f(x) = |x|$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = \underline{-1}$$

$$f'_-(0) = -1$$

Pochodne jednostronne

Jeżeli funkcja f jest określona w pewnym otoczeniu lewostronnym punktu x_0, to granicę

$$f'_-(x_0) := \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

o ile istnieje, nazywamy **pochodną lewostronną** funkcji f w punkcie x_0.

Jeżeli funkcja f jest określona w pewnym otoczeniu lewostronnym punktu x_0, to granicę

$$f'_+(x_0) := \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{h},$$

o ile istnieje, nazywamy **pochodną prawostronną** funkcji f w punkcie x_0.

$f'(x_0)$ istnieje $\equiv$ $f'_+(x_0)$, $f'_-(x_0)$ istnieją i $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$

Pochodna w przedziale domkniętym

Jeżeli funkcja f jest określona na przedziale $[a, b)$ i ma pochodną prawostronną w a, to mówimy, że jest ona **różniczkowalna** w a.

Pochodna w przedziale domkniętym

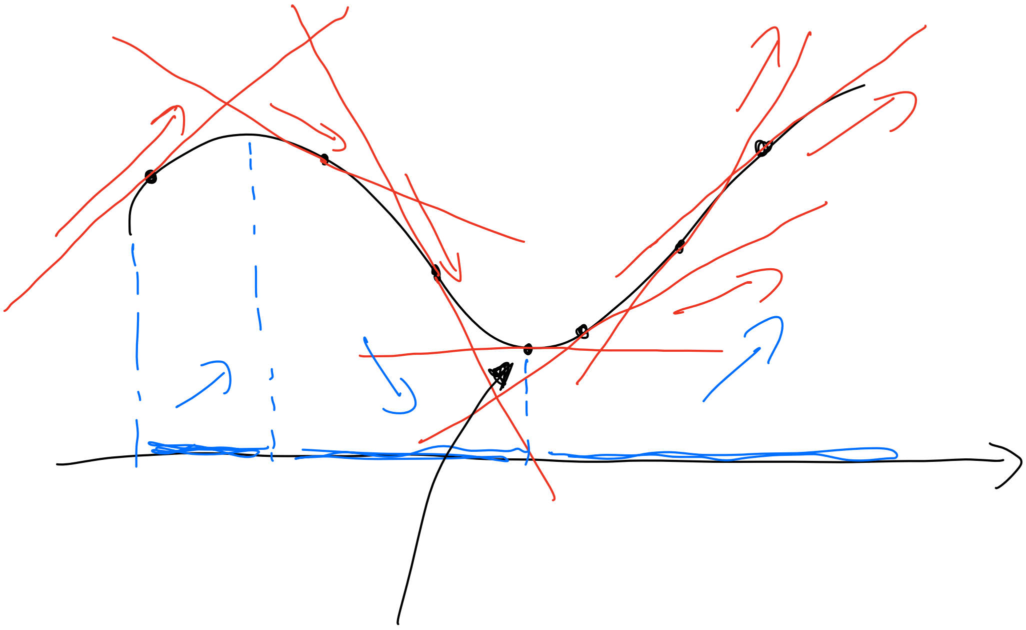
Jeżeli funkcja f jest określona na przedziale $[a, b)$ i ma pochodną prawostronną w a, to mówimy, że jest ona **różniczkowalna** w a.

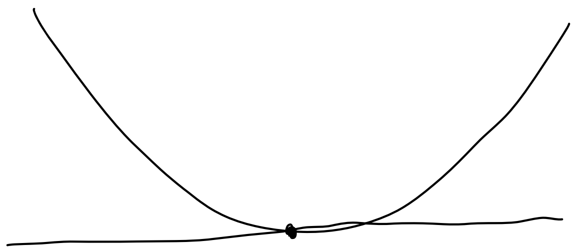
Jeżeli funkcja f jest określona na przedziale $(a, b]$ i ma pochodną lewostronną w b, to mówimy, że jest ona **różniczkowalna** w b.

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$

f jest różniczkowalna na $[a, b]$

$$\equiv \quad f'(x_0) = \begin{cases} f'_+(a), & x_0 = a, \\ f'(x_0), & x_0 \in (a, b), \\ f'_-(b), & x_0 = b. \end{cases}$$



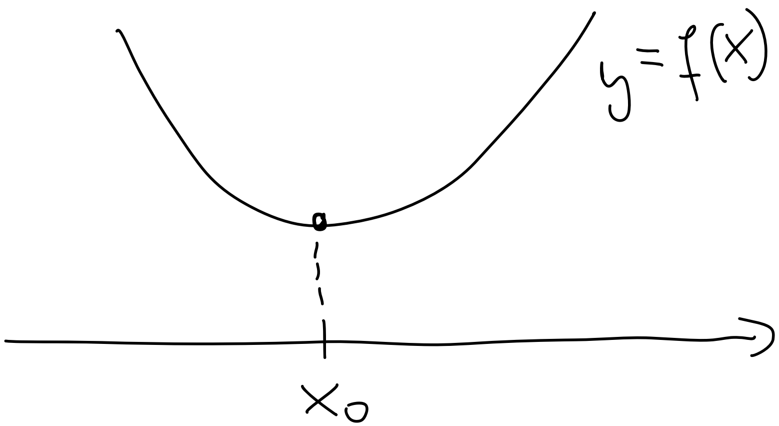


Pochodna a zachowanie funkcji

Twierdzenie Fermata

Jeżeli funkcja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ osiąga w punkcie x_0 kres dolny lub górny swoich wartości oraz istnieje pochodna $f'(x_0)$, to

$$f'(x_0) = 0.$$



$$f(x_0) = \inf_{x\in(a,b)} f(x)$$

$$f(x) - f(x_0) \geq 0, \quad x \in (a,b)$$

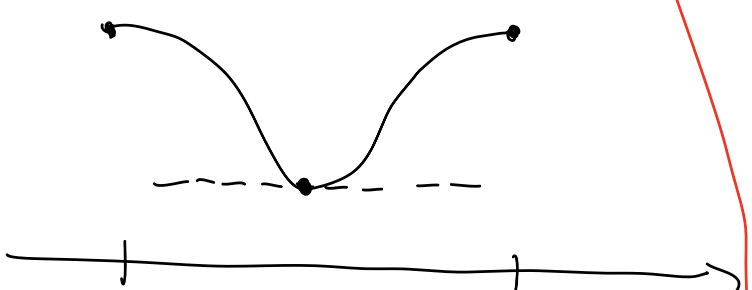
$$\frac{\overbrace{\boxed{f(x) - f(x_0)}}^{\geq 0}}{x - x_0} \xrightarrow{x \to x_0} f'(x_0)$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x_0) = f'_+(x_0) \geq 0 \\ f'(x_0) = f'_-(x_0) \leq 0 \end{array}\right] \Rightarrow \boxed{f'(x_0) = 0}$$

Twierdzenie Rolle'a

Jeżeli funkcja f jest ciągła w przedziale $[a, b]$ oraz różniczkowalna w przedziale (a, b), a dodatkowo $f(a) = f(b)$, to istnieje taki punkt $c \in (a, b)$, że

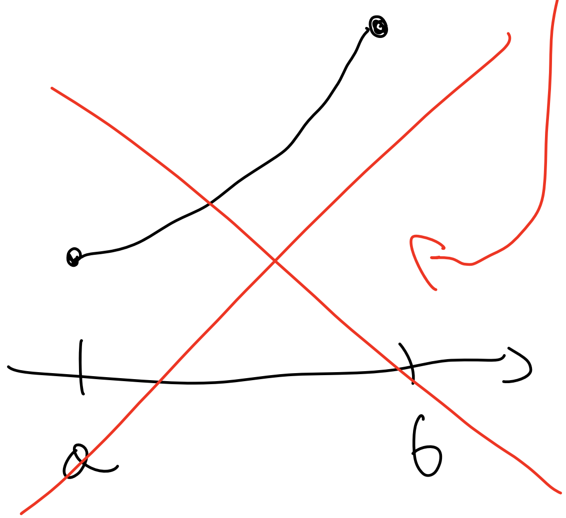
$$f'(c) = 0.$$



I f jest funkcją stałą na $[a,b]$, to $f'(x) = 0$, $x \in (a,b)$.

II f nie jest stała

$$\Longrightarrow \bigvee_{c \in (a,b)} f(c) = \inf_{x \in [a,b]} f(x) \ \vee \ f(c) = \sup_{x \in [a,b]} f(x)$$



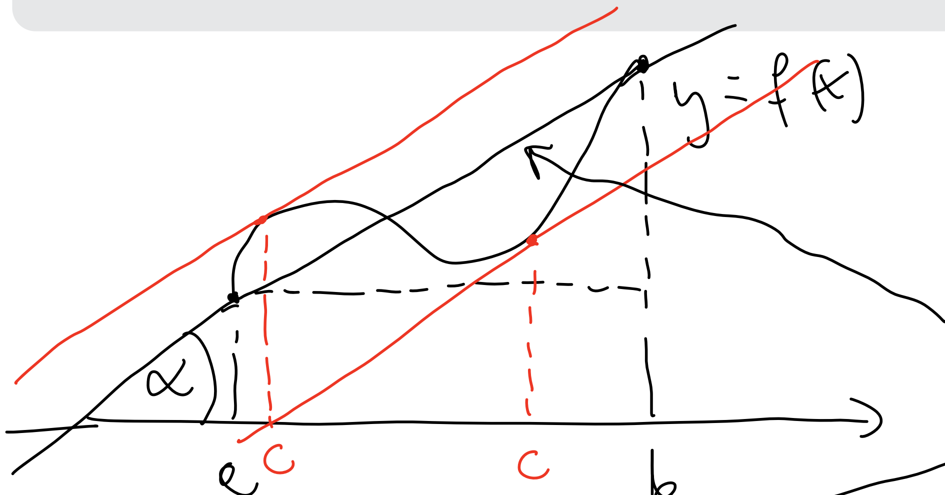
tw. Weierstrassa o przyjmowaniu kresów.

Stosujemy do p. c tw. Fermata.

Twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej

Jeżeli funkcja f jest ciągła w przedziale $[a, b]$ oraz różniczkowalna w przedziale (a, b), to istnieje taki punkt $c \in (a, b)$, że

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

równanie siecznej

tw. Rolle'a

$$g(x) = f(x) - \left[f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \right]$$

$$g(a) = f(a) - f(a) = 0$$
$$g(b) = f(b) - f(b) = 0$$

$\oplus$ g jest ciąg. na $[a,b]$

g jest różniczkowalna na (a,b)

$$\Longrightarrow \bigvee_{c \in (a,b)} g'(c) = 0$$

$$g'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$\Downarrow$$

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Niech $f: [a,b] \to \mathbb{R}$.

Załóżmy, że $f'(x) \geq 0$ dla $x \in (a,b)$

Tw. Lagrange'a $\Rightarrow \bigvee_{c \in (a,b)} \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$

$$\Rightarrow \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \geq 0 \quad | \cdot (b-a)$$

$$\Rightarrow f(b) - f(a) \geq 0$$

Niech $x, y \in [a,b]$, $x < y$.

$[x,y] \subset [a,b]$

tw. Lagrange'a $\Rightarrow \bigvee_{c \in (x,y)} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} = f'(c) \geq 0$

$$\Rightarrow f(y) - f(x) \geq 0$$

$\Rightarrow$ f jest (słabo) rosnąca.

Pochodna a monotoniczność

Twierdzenie

$[a,b]$, $[a,b)$, $(a,b]$, (a,b)

Niech funkcja $f : I \to \mathbb{R}$ określona na dowolnym przedziale I będzie **ciągła** na I oraz **różniczkowalna** wewnątrz I. Wtedy:

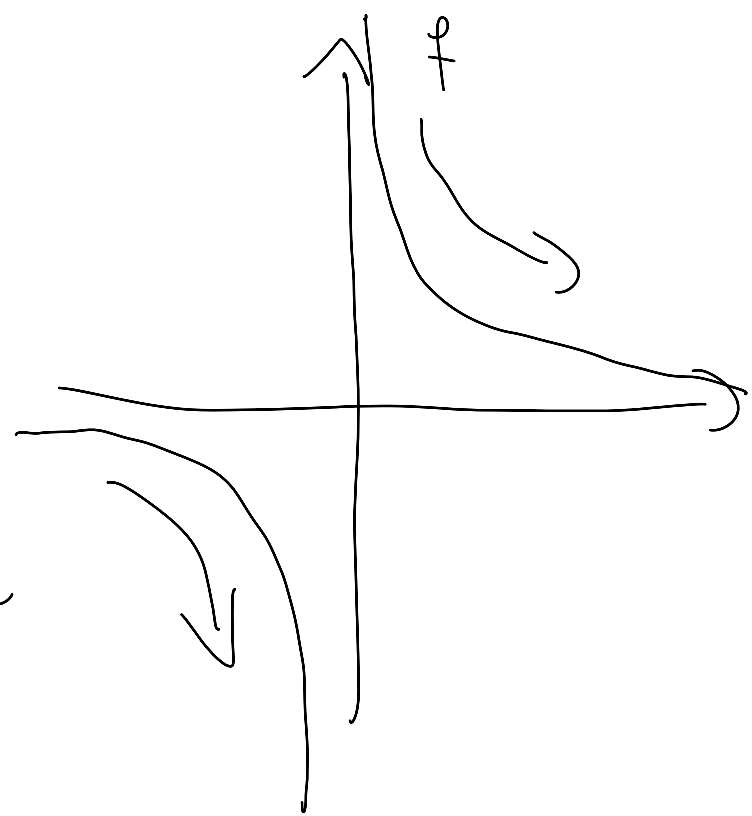
- $\rightsquigarrow$ f jest stała na I $\equiv$ $f' = 0$ wewnątrz I.
- $\rightsquigarrow$ f jest rosnącą na I $\equiv$ $f' \geqslant 0$ wewnątrz I.
- $\rightsquigarrow$ f jest malejąca na I $\equiv$ $f' \leqslant 0$ wewnątrz I.

cw.

$\boxed{\text{w sensie ścisłym}}$

$f(x) = \frac{1}{x}$, $D_f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

$f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0 \overset{?}{\Longrightarrow} f$ maleje



Pochodna a ścisła monotoniczność

Twierdzenie

Niech funkcja $f\colon I \to \mathbb{R}$ określona na dowolnym przedziale I będzie **ciągła** na I oraz **różniczkowalna** wewnątrz I. Jeżeli funkcja f' nie jest stale równa 0 na żadnym podprzedziale przedziału I, to

- $\rightsquigarrow$ f jest **ściśle** rosnącą na I $\equiv$ $f' \geqslant 0$ wewnątrz I.
- $\rightsquigarrow$ f jest **ściśle** malejąca na I $\equiv$ $f' \leqslant 0$ wewnątrz I.

Dow. Ćw.

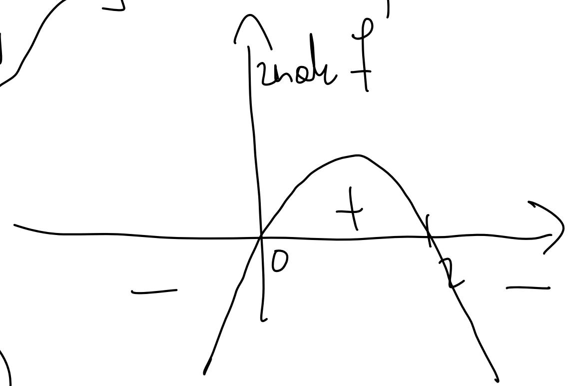
Wniosek.

$$\left.\begin{array}{l} f' \geqslant 0 \text{ wewnątrz } I \\ \oplus\ f' \text{ ma skończenie wiele miejsc zerowych} \end{array}\right\} \Longrightarrow f \text{ jest ściśle rosnąca.}$$

$$f(x) = x^2 e^{-x}, \qquad D_f = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = 2x e^{-x} + x^2 e^{-x} \cdot (-1) = 2xe^{-x} - x^2 e^{-x} =$$

$$= \underbrace{e^{-x}}_{>0} \cdot \underbrace{x \cdot (2 - x)}$$



x	$(-\infty, 0]$	$[0, 2]$	$[2, +\infty)$
$f'(x)$	−	+	−
$f(x)$	↘	↗	↘

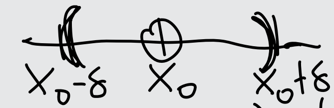
Ekstrema lokalne

?

Ekstrema

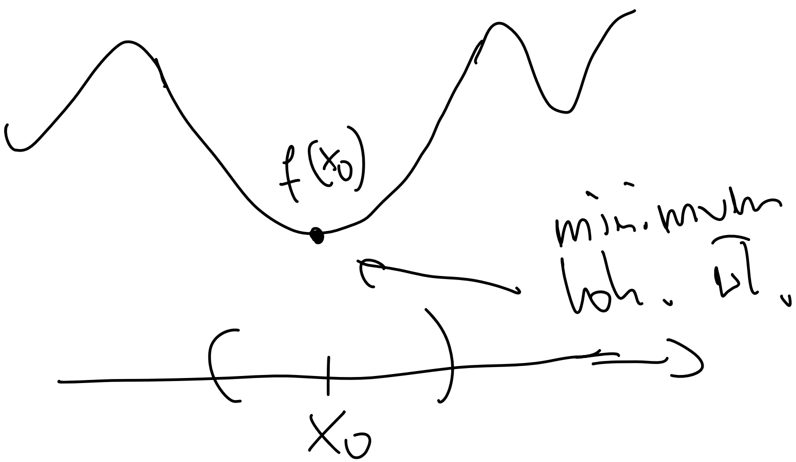
Mówimy, że funkcja f ma w punkcie x_0 **minimum lokalne**, jeżeli

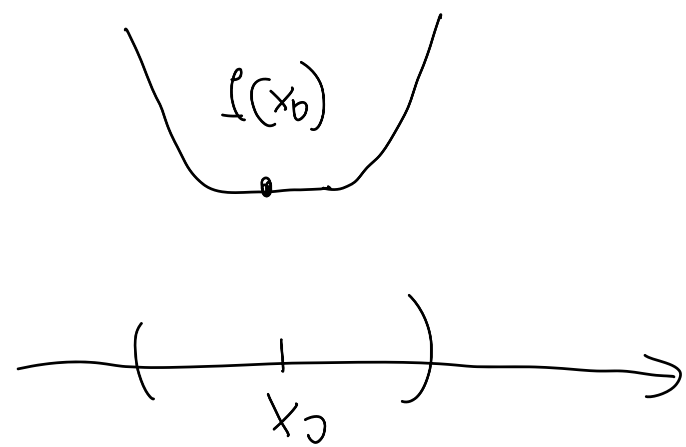
$$\bigvee_{\delta>0} \bigwedge_{x \in \underbrace{S(x_0,\delta)}} f(x) \geqslant f(x_0).$$



$S(x_0,\delta) = (x_0-\delta, x_0) \cup (x_0, x_0+\delta)$

Jeżeli nierówność $\geqslant$ zamienimy na $>$, to powiemy, że jest to **minimum lokalne właściwe**.





$f(x_0) < f(x)$

$x \in S(x_0,\delta)$

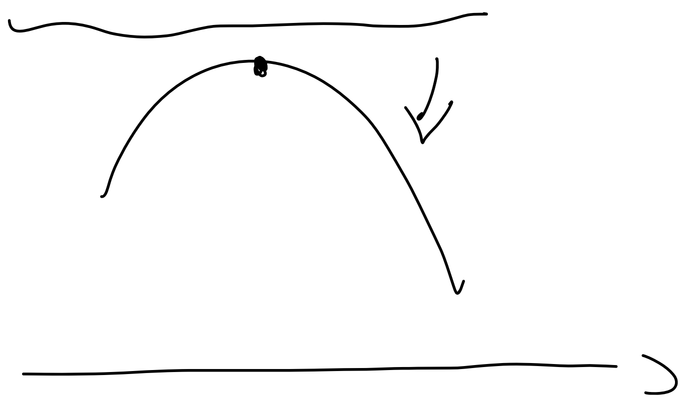
$f(x_0) \leq f(x)$

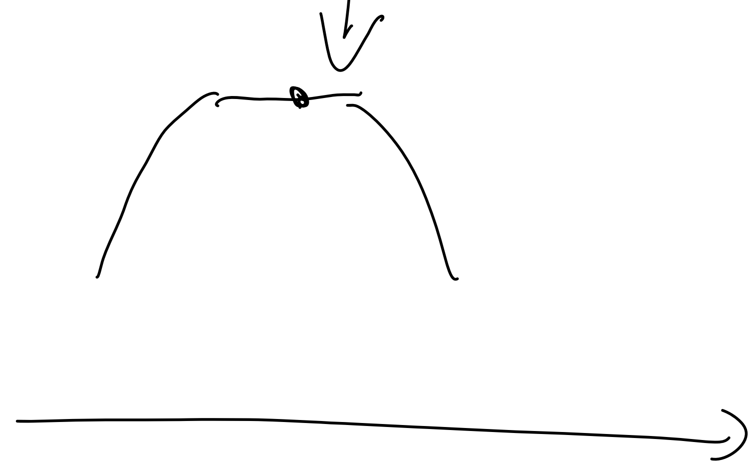
Ekstrema

Mówimy, że funkcja f ma w punkcie x_0 **maksimum lokalne**, jeżeli

$$\bigvee_{\delta>0}\ \bigwedge_{x\in S(x_0,\delta)} f(x)\leqslant f(x_0).$$

Jeżeli nierówność $\leqslant$ zamienimy na $<$, to powiemy, że jest to **maksimum lokalne właściwe**.



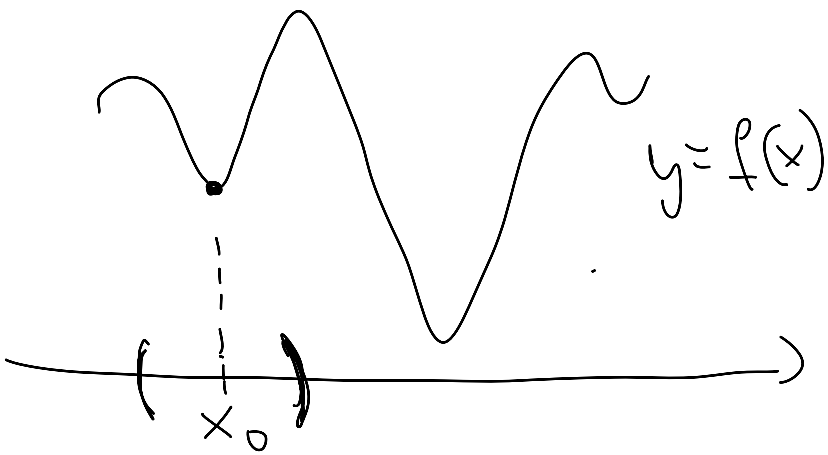


Warunek konieczny istnienia ekstremum

Twierdzenie Fermata

Jeśli funkcja $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ ma w punkcie x_0 ekstremum lokalne i jest w tym punkcie różniczkowalna, to

$$f'(x_0) = 0.$$

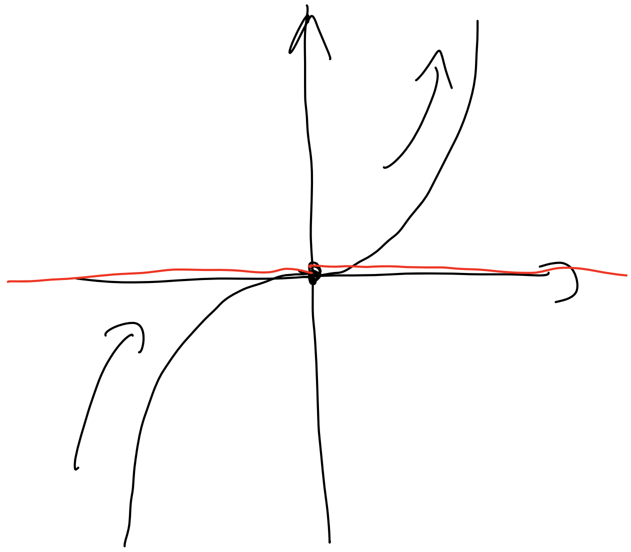


$(x_0-\delta, x_0+\delta)$

f obcięta do $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ osiąga kres dolny w. x_0.

Stosujemy poprzednie tw. Fermata

$f(x) = x^3$

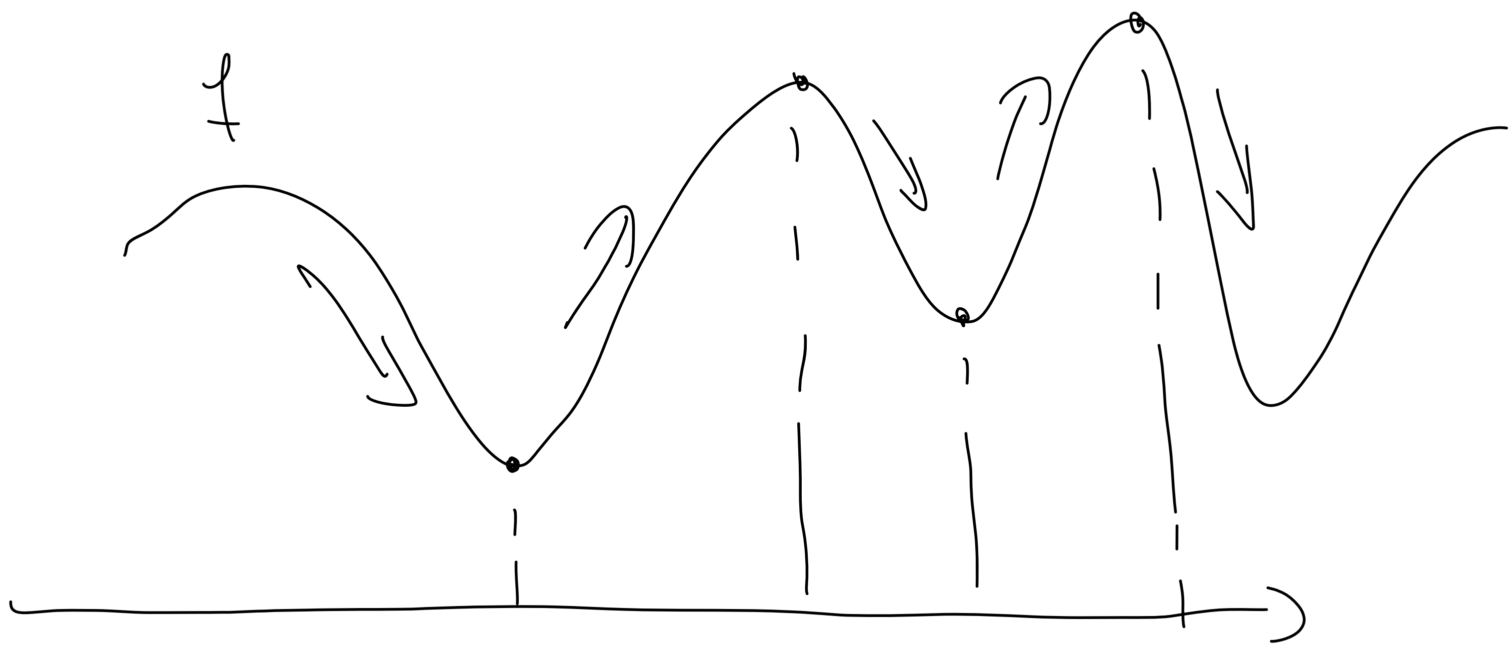


$f'(x) = 3x^2$

$f'(0) = 0$

$f'(x_0) = 0$ NIE JEST warunkiem dostatecznym istnienia ekstremum.

Warunek dostateczny istnienia ekstremum



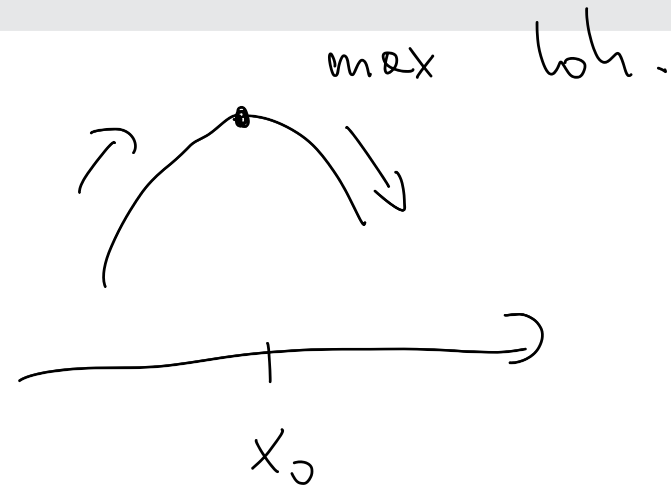
$$f'(x) = 0 \quad \equiv \quad x = x_1, x_2, \dots$$

Jeżeli f' zmienia znak przy przejściu przez x_0, to f ma ekstremum w x_0.

Warunek dostateczny istnienia ekstremum

Niech funkcja $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ będzie **ciągła** w punkcie x_0 oraz dla pewnego $\delta > 0$ **różniczkowalna** w zbiorze $S(x_0, \delta)$.

- Jeżeli $f'(x) < 0$ dla każdego $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ oraz $f'(x) > 0$ dla każdego $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, to f ma w punkcie x_0 minimum lokalne właściwe,
- Jeżeli $f'(x) > 0$ dla każdego $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ oraz $f'(x) < 0$ dla każdego $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, to f ma w punkcie x_0 maksimum lokalne właściwe.



$f(x) = x^2 e^{-x}$

$f'(x) = e^{-x} x(2-x)$

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	min lok.	$\nearrow$	max lok.	$\searrow$

$f(0) = 0$

$f(2) = 2^2 \cdot e^{-2}$