IMIĘ i NAZWISKO (DRUKOWANE): ....

Nr grupy: .... | 40 pkt.

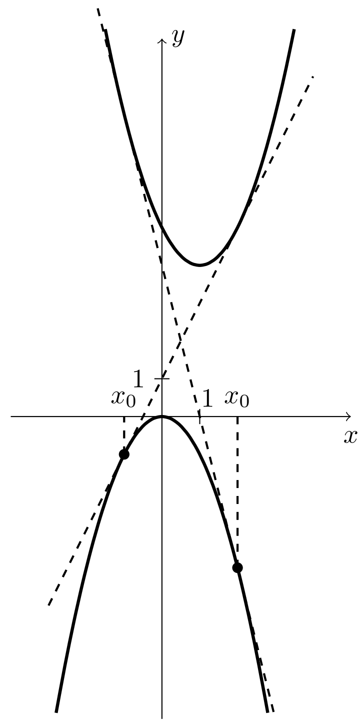
Kolokwium I – 15 kwietnia 2025 r.

1. Wyznacz wszystkie proste, które są jednocześnie styczne do krzywych o równaniach

$$y = -x^2, \qquad y = x^2 - 2x + 5.$$

10 pkt.

Rozwiązanie: Poglądowy rysunek sugeruje, że będą dwie takie proste.



Niech

$$f(x) = -x^2, \qquad g(x) = x^2 - 2x + 5.$$

Równania stycznych do wykresów funkcji f i g odpowiednio w punktach x_0 i x_1 mają postać

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \qquad y = g(x_1) + g'(x_1)(z - x_1),$$

czyli

$$y = -x_0^2 - 2x_0(x - x_0) = -2x_0 x + x_0^2, \qquad y = x_1^2 - 2x_1 + 5 + (2x_1 - 2)(x - x_1) = (2x_1 - 2)x - x_1^2 + 5.$$

Musimy znaleźć takie punkty x_0 i x_1, aby te proste się pokrywały, to znaczy

$$\begin{cases} -2x_0 = 2x_1 - 2, \\ \quad x_0^2 = -x_1^2 + 5. \end{cases}$$

Otrzymujemy $x_0 = 1 - x_1$ oraz $(1 - x_1)^2 = -x_1^2 + 5$, czyli $x_1^2 - x_1 - 2 = 0$. Rozwiązaniami ostatniej równości są $x_1 = -1$ lub $x_1 = 2$, co daje

$$\begin{cases} x_0 = 2, \\ x_1 = -1, \end{cases} \qquad \text{lub} \qquad \begin{cases} x_0 = -1, \\ x_1 = 2. \end{cases}$$

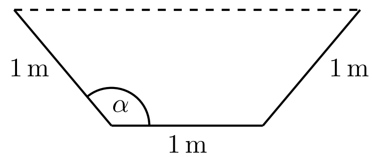
Ostatecznie dostajemy dwie proste, które są styczne do obu krzywych:

$$y = -4x + 4, \qquad y = 2x + 1.$$

□

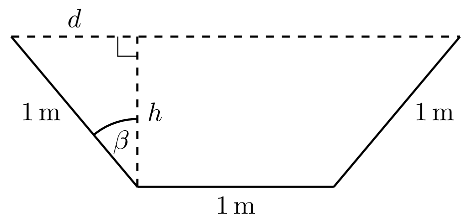
2. Przekrój poprzeczny kanału przeciwpowodziowego ma mieć kształt trapezu, którego trzy boki mają długość 1 m, patrz rysunek.

10 pkt.



Wyznacz kąt α, przy którym pole przekroju jest największe oraz oblicz to pole.

Rozwiązanie: Oznaczmy $\beta = \alpha - \frac{\pi}{2}$ oraz $h = \cos\beta$ i $d = \sin\beta$.



Pole P trapezu jest sumą pól dwóch trójkątów prostokątnych, których przyprostokątne mają długości d i h oraz jednego prostokąta o bokach długości 1 i h. Otrzymujemy więc

$$P = P(\beta) = 2 \cdot \frac{1}{2}dh + h = \sin\beta\cos\beta + \cos\beta.$$

Musimy znaleźć największą wartość funkcji P na przedziale $[0, \pi/2)$. Mamy

$$P'(\beta) = \cos^2\beta - \sin^2\beta - \sin\beta = 1 - 2\sin^2\beta - \sin\beta.$$

Ostatnie wyrażenie jest funkcją kwadratową zmiennej $t = \sin\beta$ postaci $-2t^2 - t + 1$. Wyróżnik tego trójmiany jest równy 9, skąd $-2t^2 - t + 1 = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $t = \frac{1}{2}$ lub $t = -1$. Uwzględniając dziedzinę funkcji P, dostajemy $P'(\beta) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\beta = \pi/6$. Ponadto

$$P'(\beta) = (1/2 - \sin\beta)(\sin\beta + 1),$$

a wyrażenie w drugim nawiasie jest dodatnie na przedziale $[0, \pi/2)$. Ponieważ funkcja sinus jest na tym przedziale rosnąca, to $P'(\beta)$ przyjmuje wartości dodatnie dla $\beta \in [0, \pi/6)$ oraz ujemne dla $\beta \in (\pi/6, \pi/2)$. W pierwszym z tych przedziałów funkcja P rośnie, a w drugim maleje, więc największą wartość osiąga w punkcie $\beta = \pi/6$ (co odpowiada $\alpha = \beta + \pi/2 = 2\pi/3$), która wynosi

$$P(\pi/6) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

$\square$

3. Rozważmy wielomian postaci

$$ax^3 + bx^2 + cx + d$$

10 pkt.

dla pewnych stałych rzeczywistych a, b, c i d spełniających warunek $b^2 < ac$. Uzasadnij, że wielomian ten ma dokładnie jedno miejsce zerowe.

Rozwiązanie: Zauważmy najpierw, że z nierówności $b^2 < ac$ wynika, że liczba a jest różna od zera. Niech

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Mamy

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Ponieważ $a \neq 0$, to pochodna f' jest trójmianem kwadratowym, którego wyróżnik jest równy

$$\Delta = 4b^2 - 12ac = 4(b^2 - 3ac).$$

Wiemy jednak, że $b^2 < ac$, więc Δ jest ujemna, co oznacza, że pochodna wielomianu f nie ma miejsc zerowych i jest stale dodatnia (w przypadku, gdy $a > 0$) lub stale ujemna (w przypadku, gdy $a < 0$). W konsekwencji wielomian f jest ściśle rosnący lub ściśle malejący na $\mathbb{R}$. Ponadto, ze względu na nieparzysty stopień wielomianu,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \qquad \text{i} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

dla $a > 0$, oraz

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \qquad \text{i} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

dla $a < 0$. Widzimy więc, że funkcja f jest ściśle monotoniczna na $\mathbb{R}$, której granice w nieskończonościach są równe $+\infty$ i $-\infty$. Ostatecznie, ponieważ f jest ciągła i ma własność Darboux, to przyjmuje każdą wartość rzeczywistą dokładnie raz. W szczególności ma ona dokładnie jedno miejsce zerowe. $\square$

4. Oblicz całki nieoznaczone:

(a) $\int x \ln^2 x \, \mathrm{d}x$ (b) $\int \frac{1}{\operatorname{ctg} x \ln(\cos x)} \, \mathrm{d}x$

10 pkt.

Rozwiązanie: (a) Stosując dwukrotnie całkowanie przez części, otrzymujemy

$$\begin{aligned}\int x \ln^2 x \, \mathrm{d}x &= \int \left(\frac{x^2}{2}\right)' \ln^2 x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2 \ln^2 x - \frac{1}{2}\int x^2 (\ln^2 x)' \, \mathrm{d}x = \\ &= \frac{1}{2}x^2 \ln^2 x - \int x \ln x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2 \ln^2 x - \int \left(\frac{x^2}{2}\right)' \ln x \, \mathrm{d}x = \\ &= \frac{1}{2}x^2 \ln^2 x - \left[\frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{2}\int x^2 (\ln x)' \, \mathrm{d}x\right] = \\ &= \frac{1}{2}x^2 \ln^2 x - \frac{1}{2}x^2 \ln x + \frac{1}{2}\int x \, \mathrm{d}x = \\ &= \frac{x^2}{2}\left[\ln^2 x - \ln x + \frac{1}{2}\right] + C.\end{aligned}$$

(b) Mamy $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$, więc

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\operatorname{ctg} x \ln(\cos x)} \, \mathrm{d}x &= \int \frac{\sin x}{\cos x \ln(\cos x)} \, \mathrm{d}x = \left|\begin{matrix} t = \cos x \\ \mathrm{d}t = -\sin x \, \mathrm{d}x \end{matrix}\right| = \\ &= -\int \frac{1}{t \ln t} \, \mathrm{d}t = \left|\begin{matrix} u = \ln t \\ \mathrm{d}u = \frac{1}{t} \, \mathrm{d}t \end{matrix}\right| = \\ &= -\int \frac{\mathrm{d}u}{u} = -\ln|u| + C = -\ln|\ln(\cos x)| + C.\end{aligned}$$

□