Zestaw 3 — Logika

Część A

1. Przypomnij następujące prawa rachunku zdań: przemienność oraz łączność koniunkcji, alternatywy i alternatywy wykluczającej (XOR), rozdzielność koniunkcji względem alternatywy i alternatywy względem koniunkcji, de Morgana. Sprawdź przy pomocy tabel prawdy, że są to rzeczywiście prawa rachunku zdań.

2. Sprawdź, przy pomocy tabeli prawdy, że poniższe formuły są tautologiami:

a) $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$,

b) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$,

c) $[(p \Rightarrow q) \Rightarrow p] \Rightarrow p$,

d) $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$,

e) $[p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \Rightarrow [(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)]$.

3. Zapisz formuły z zadania 2 w koniunkcyjnej i dysjunkcyjnej postaci normalnej.

4. Przedstaw formuły $p \oplus q$ i $p \oplus q \oplus r$ w koniunkcyjnej i dysjunkcyjnej postaci normalnej.

5. Określ wartość logiczną zdań:

a) $\bigwedge_x \bigvee_y 2x - y = 0$,

b) $\bigwedge_x \bigvee_y x - 2y = 0$,

c) $\bigwedge_x x < 10 \Rightarrow \Big(\bigwedge_y y < x \Rightarrow y < 9\Big)$,

d) $\bigwedge_x \bigvee_y (y > x \wedge \bigvee_z y + z = 100)$,

gdy zakresem zmienności wszystkich zmiennych są $\mathbb{N}_0$, $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{R}$.

Część B

6. Sprawdź, dowolną metodą, czy poniższe formuły są tautologiami:

a) $\big\{\big[(p \wedge q) \Rightarrow r\big] \wedge \big[(p \vee q) \Rightarrow \neg r\big]\big\} \Rightarrow (p \wedge q \wedge r)$,

b) $\big[(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow q) \wedge (s \Rightarrow q)\big] \Rightarrow \big[(p \wedge r \wedge \neg s) \Rightarrow q\big]$,

c) $\big[(p \vee q) \wedge (r \vee s)\big] \Rightarrow \big\{\big[(p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r)\big] \wedge \big[(q \Rightarrow s) \vee (q \Rightarrow p)\big]\big\}$,

d) $\big[(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s) \wedge (t \Rightarrow u)\big] \Rightarrow \big[(p \wedge r \wedge t) \Rightarrow (q \wedge s \wedge u)\big]$.

7. Wykaż, posługując się znanymi prawami rachunku zdań, że:

a) $(p \Rightarrow q) \equiv \neg(p \wedge \neg q)$,

b) $\big[(p \wedge q) \Rightarrow r\big] \equiv \big[p \Rightarrow (q \Rightarrow r)\big]$,

c) $\big[(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)\big] \equiv \big[(p \vee q) \Rightarrow r\big]$.

8. Znajdź najkrótszą formułę równoważną z formułą:

a) $(p \wedge q \wedge s) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge \neg s) \vee \neg\big[(p \wedge r) \Rightarrow q\big]$,

b) $(q \wedge r \wedge s \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg p) \vee (r \wedge s)$.

9. Zbuduj formułę zależną od trzech zmiennych logicznych, która przyjmuje wartość 1 wtedy i tylko wtedy, gdy:

a) dokładnie jedna ze zmiennych przyjmuje wartość 1,

b) dokładnie dwie ze zmiennych przyjmują wartość 1.

10. Wykorzystując funktory $\oplus$ oraz 1, zapisz formułę równoważną z $p \Leftrightarrow q$,

11. Przy pomocy funktorów $\oplus$, $\Rightarrow$, 1 i 0 (nie musisz wykorzystywać wszystkich) zapisz formuły równoważne z $p \wedge q$ i $p \vee q$.

12. Zapisz funktory negacji, koniunkcji, alternatywy i implikacji, wykorzystując jedynie funktor NAND.

13. Opierając się na rozwiązaniu zadania 12, zbuduj przy pomocy funktora NAND oraz jednej zmiennej p formułę, która niezależnie od wartości p przyjmie wartość 1. Stwórz analogiczną formułę, która przyjmie wartość 0.

14. Wyraź

a) funktor $\Rightarrow$ przy pomocy funktorów $\vee$ i $\neg$,
b) funktor $\wedge$ przy pomocy funktorów $\Rightarrow$ i $\neg$,
c) funktor $\vee$ przy pomocy funktora $\Rightarrow$.

15. Uzasadnij, że

a) funktora $\neg$ nie można wyrazić przez funktory $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$ i $\Leftrightarrow$,
b) funktora $\Rightarrow$ nie można wyrazić przez funktory $\wedge$ i $\vee$,
c) funktora $\wedge$ nie można wyrazić przez funktory $\vee$ i $\Rightarrow$.

16. Uzasadnij, że zbiór funktorów $\{\Rightarrow, \neg\}$ jest zupełny.

17. Określ wartość logiczną zdań (zakresem zmienności wszystkich zmiennych jest $\mathbb{R}$):

a) $\bigwedge_x \bigwedge_y x^2 + y^2 > 0$,
b) $\bigwedge_x \bigvee_y x^2 + y^2 = 0$,
c) $\bigwedge_x \bigvee_y x^2 + y = 0$,
d) $\bigvee_x \bigwedge_y x^2 + y = 0$,
e) $\bigvee_a \bigwedge_x (a-3)x^2 + (a+1)x + 1 < 0$,
f) $\bigvee_a \bigvee_x x^2 - 2x + \log_{\frac{1}{2}} a = 0$,
g) $\bigvee_a \bigwedge_x a^2x^2 + ax - 4 > 0$,
h) $\bigvee_a \bigwedge_x x^2 + 4x + \left(\frac{1}{2}\right)^a > 0$.

18. Zapisać za pomocą funktorów i kwantyfikatorów następujące zdania:

a) dla dowolnych a i b, dla których $a > b$, można znaleźć taką liczbę n, że $nb > a$,
b) a jest liczbą parzystą,
c) a jest sumą trzech kwadratów liczb wymiernych,
d) nie istnieje największa liczba naturalna,
e) p jest liczbą pierwszą,
f) c jest największym wspólnym dzielnikiem liczb a i b,
g) jeżeli dwie liczby całkowite dzielą się wzajemnie jedna przez drugą, to liczby te różnią się co najwyżej znakiem,
h) liczby a i b mają takie same dzielniki,
i) układ równań $x + y = 2$, $2x + 2y = 3$ nie ma rozwiązań,
j) funkcja f ma dokładnie jedno miejsce zerowe.

W rozwiązaniu można użyć symbolu podzielności: dla liczb całkowitych piszemy $a|b$ wtedy i tylko wtedy, gdy b dzieli się bez reszty przez a.

19. Wyznaczyć wykresy funkcji zdaniowych (zakresem zmienności wszystkich zmiennych jest zbiór liczb rzeczywistych):

a) $\bigvee_x x^2 + y^2 = 1$,
b) $\bigwedge_x x^2 + y^2 = 1$,
c) $\bigvee_y xy = 1$,
d) $\bigwedge_y xy < 1$,
e) $\bigwedge_x x^2 + 1 < y$,
f) $\bigvee_x x^2 + y^2 = z^2$,
g) $\bigwedge_x x^2 + y^2 \neq z^2$,
h) $\bigwedge_x \bigvee_y x^2 + y^2 = z^2$,
i) $\bigvee_x \bigwedge_y xy = z$,
j) $\bigwedge_x \bigvee_y (x < z) \wedge (z < y)$,

k) $\bigwedge_x \bigwedge_y x^2 + y^2 \geqslant z$, l) $\bigvee_x (x^2 + y^2 = 1) \vee (x < x)$.

Część C

20. Wykaż, że NAND i NOR są jedynymi funktorami dwuargumentowymi, przy pomocy których można wyrazić wszystkie inne funktory jedno- i dwuargumentowe.

21. Uzasadnij, że zbiór funktorów

$$\{\oplus, \Leftrightarrow, \neg, 1, 0\}$$

nie jest zupełny.

22. Dla dowolnej formuły CNF znajdź formułę 3-CNF (czyli taką formułę CNF, że każda jej klauzula alternatyw składa się z co najwyżej trzech literałów), która jest spełnialna wtedy i tylko wtedy, gdy spełnialna jest formuła wyjściowa.

23. Bolek, Lolek i Tola grają w następującą grę: Tola jest sama w zamkniętym pokoju, w którym na stole leży w rzędzie 9 białych, ponumerowanych (od 1 do 9), kopert. Do pokoju wchodzi Bolek. Tola podaje wybrany przez siebie numer koperty, a Bolek może, ale nie musi, oznaczyć tę kopertę znakiem X. Tola i Bolek powtarzają ten schemat 8 razy, przy czym Tola za każdym razem wybiera inną kopertę. Bolek wychodzi z pokoju, ale w żaden sposób nie może się teraz kontaktować z Lolkiem. W tym czasie Tola podchodzi do ostatniej koperty, która nie została wcześniej wskazana, i ukrywa w niej szyfr do sejfu. Może też, podobnie jak Bolek, oznaczyć tę kopertę znakiem X. W tej chwili do pokoju wchodzi Lolek i jego zadaniem jest znaleźć szyfr. Może w tym celu otworzyć maksymalnie 3 koperty. Wymyśl strategię, która gwarantuje chłopcom zwycięstwo.

24. Powiemy, że zbiór formuł Φ jest spełnialny, jeżeli istnieje wartościowanie v, przy którym $v(\phi) = 1$ dla każdego $\phi \in \Phi$. Uzasadnij, że dowolny zbiór formuł zależnych od zmiennych logicznych p_1, p_2, $\dots$ (zbiór zmiennych jest nieskończony, ale każda formuła zależy tylko od skończenie wielu z nich) jest spełnialny wtedy i tylko wtedy, gdy spełnialny jest każdy jego skończony podzbiór.

Część D

25. Napisz program, który dodaje dwie liczby całkowite dodatnie, ale nie wykorzystuje przy tym żadnego działania arytmetycznego $(+, -, \cdot, /, \dots)$.

26. Napisz program, który mnoży dwie liczby całkowite dodatnie, ale nie wykorzystuje przy tym żadnego działania arytmetycznego poza dodawaniem. Jednocześnie postaraj się, aby dodawań nie było za dużo. Program ma działać istotnie szybciej niż przy naiwnym podejściu opierającym się na równości $m \cdot n = n + n + \cdots + n$.