Zestaw 1 — Teoria mnogości

Część A

1. Niech

$$A = \{x \in \mathbb{R} \colon (x-1)^2 \leqslant 1\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R} \colon |x-3| > 2\}, \quad C = \{-1, 0\}$$

Wyznacz $(A \cup B) \setminus C$, $(B \setminus C) \cap A$ i $A \setminus (B \setminus C)$, $(A \setminus C) \triangle B$.

2. Wyznacz zbiór potęgowy dla zbiorów:
a) $\{1, 2, 3, 4\}$,
b) $\emptyset$,
c) $\{\emptyset\}$,
d) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

3. Wyznacz iloczyn kartezjański $A \times B$ dla zbiorów:
a) $A = \{0, 1\}$, $B = \{1, 2\}$,
b) $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$,
c) $A = \emptyset$, $B = \{1, 2, 3\}$.

4. Wyznacz zbiory $A \times (B \times C)$, $(A \times B) \times C$, $A \times B \times C$ dla

$$A = \{0, 1\}, \qquad B = \{1, 2\}, \qquad C = \{2, 3\}.$$

5. Naszkicuj na płaszczyźnie zbiory $A \times B$ i $B \times A$ dla:
a) $A = \{y \in \mathbb{R} \colon -1 < y < 1\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \colon 0 < x \leqslant 1\}$,
b) $A = \mathbb{Z}$, $B = \langle 1, 2)$,
c) $A = \{x \in \mathbb{R} \colon x^2 + x - 2 \geqslant 0\}$, $B = \{b \in \mathbb{N} \colon 2^b < 11\}$.

6. Podaj warunek równoważny równości

$$A \times B = B \times A.$$

Część B

7. Udowodnij, że dla dowolnych zbiorów A, B, C i D zachodzą równości:
a) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$,
b) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$,
c) $(A \setminus B) \cup C = [(A \cup C) \setminus B] \cup (B \cap C)$,
d) $(A \setminus B) \cap (C \setminus D) = (A \cap C) \setminus (B \cup D)$.

8. Wykaż, że dla dowolnych zbiorów A, B, C i D zachodzą warunki:
a) jeśli ($A \subset B$ i $C \subset D$), to ($A \cup C \subset B \cup D$),
b) jeśli $A \subset B$ oraz $C \subset D$, to $A \setminus D \subset B \setminus C$.

9. Udowodnij, że dla dowolnych zbiorów A, B i C zachodzą równości:
a) $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$,
b) $A \setminus B = A \triangle (A \cap B)$,
c) $A \triangle B = A^c \triangle B^c$.

10. Wykorzystując znane prawa rachunku zbiorów, pokaż, że

$$(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C).$$

11. Uzasadnij, że dla dowolnych zbiorów A i B istnieje dokładnie jeden zbiór C, dla którego

$$A \triangle C = B.$$

12. Pokaż, że dla dowolnych zbiorów A, B i C jeżeli zbiory $A \triangle B$ i $B \triangle C$ są skończone, to skończony jest również zbiór $A \triangle C$.

13. Znajdź warunek równoważny równości

$$\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$$

wyrażony w terminach własności zbiorów A i B.

14. Uzasadnij, że dla dowolnych zbiorów A i B mamy

a) $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$,

b) $\mathcal{P}(A \cup B) = \{C \colon C = A_1 \cup B_1 \text{ dla pewnych } A_1 \in \mathcal{P}(A) \text{ i } B_1 \in \mathcal{P}(B)\}$.

15 (Alternatywne definicje pary uporządkowanej)**.** Dla dowolnych elementów a i b zdefiniujmy

$$\langle a, b\rangle \coloneqq \{\{\{a\}, \emptyset\}, \{\{b\}\}\}$$

oraz

$$[a, b] \coloneqq \{\{a, \emptyset\}, \{b, \{\emptyset\}\}\}.$$

Udowodnij, że są to poprawne definicje pary uporządkowanej, to znaczy

$$\langle a, b\rangle = \langle c, d\rangle \qquad \text{i} \qquad [a, b] = [c, d]$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$a = c \qquad \text{i} \qquad b = d.$$

16. Dla dowolnych elementów a i b określmy

$$(a, b)_1 = \{\{a\}, \{b\}\} \qquad \text{oraz} \qquad (a, b)_2 = \{a, \{b\}\}.$$

Uzasadnij, podając odpowiednie przykłady, że żadna z powyższych definicji nie określa poprawnie pary uporządkowanej.

17 (Uporządkowana trójka)**.** Dla dowolnych elementów a, b i c określamy

$$(a, b, c) = ((a, b), c).$$

Udowodnij, że

$$(a, b, c) = (d, e, f)$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$a = d, \qquad b = e, \qquad c = f.$$

18. *Multizbiorem* nazywamy obiekt, który podobnie jak zbiór złożony jest z dowolnych elementów, ale w którym ich krotność ma znaczenie. Multizbiory będziemy zapisywać w podwójnych nawiasach kwadratowych, na przykład $[\![a_1, \ldots, a_n]\!]$. W szczególności multizbiór $[\![1, 2, 2]\!]$ składa się z trzech elementów: jednej 1 i dwóch 2. Jest to inny obiekt niż zbiór $\{1, 2, 2\} = \{1, 2\}$. Zaproponuj definicję multizbioru w oparciu o pojęcia teorii mnogości.

19. Udowodnij, że dla dowolnych zbiorów A, B, C i D mamy

a) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$,

b) $(A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (A \times D) \cup (B \times C) \cup (B \times D)$,

c) $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$.

20. Niech $A_1, \ldots, A_n$ będą dowolnymi zbiorami. Zdefiniujmy $\mathcal{A}$ jako najmniejszy zbiór, dla którego:

a) $A_i \in \mathcal{A}$ dla dowolnego $i \in \{1, \ldots, n\}$,

b) jeżeli $X \in \mathcal{A}$ oraz $Y \in \mathcal{A}$, to ich suma $X \cup Y$ również należy do $\mathcal{A}$.

Ile maksymalnie elementów ma zbiór $\mathcal{A}$? Podaj przykład takiego zbioru.

Część C

21. Niech $A_1, \ldots, A_n$ będą dowolnymi zbiorami. Zdefiniujmy $\mathcal{A}$ jako najmniejszy zbiór, dla którego:

a) $A_i \in \mathcal{A}$ dla dowolnego $i \in \{1, \ldots, n\}$,

b) jeśli $X \in \mathcal{A}$ oraz $Y \in \mathcal{A}$, to ich suma $X \cup Y$ oraz różnica $X \setminus Y$ również należą do $\mathcal{A}$.

Ile maksymalnie elementów ma zbiór $\mathcal{A}$? Podaj przykład takiego zbioru.

Część D

22. Napisz program, który dla zadanej liczy naturalnej n wypisze wszystkie podzbiory zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$.

23. Napisz program, który dla zadanej liczby naturalnej n oraz liczby $k \in \{1, \ldots, n\}$ wypisze wszystkie podzbiory k-elementowe zbiory $\{1, \ldots, n\}$.

24. Napisz program, który dla zadanej liczby naturalnej n wypisze wszystkie permutacje zbioru $\{1, \ldots, n\}$, to znaczy wszystkie sposoby uporządkowania elementów tego zbioru.