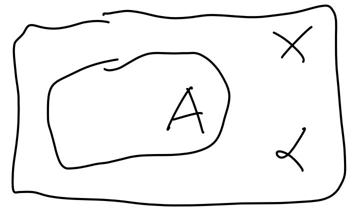
$(X, \preccurlyeq)$ $\quad A \subset X$

$(A, \preccurlyeq)$ ← porządek



El. $\boxed{x \in X}$ jest ograniczeniem górnym zbioru A, jeżeli

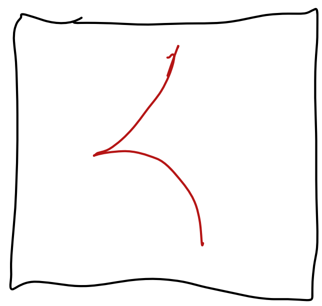
$$\bigwedge_{a \in A} a \preccurlyeq x.$$

El. $\boxed{x \in X}$ jest ograniczeniem dolnym zbioru A, jeżeli

$$\bigwedge_{a \in A} x \preccurlyeq a.$$

$\overline{A}$ – zb. ograniczeń górnych

$\underline{A}$ – — " — dolnych



Kresem górnym zbioru A nazywamy najmniejszy element $\overline{A}$ (o ile taki istnieje).

$\sup A$ (supremum)

Kresem dolnym zbioru A nazywamy największy element $\underline{A}$ (o ile taki istnieje).

$\inf A$ (infimum)

1) $(\mathbb{R}, \leq)$ $\quad A = [0,1)$

$([0,1), \leq)$

$\overline{[0,1)} = \{x \in \mathbb{R} : \bigwedge_{a \in [0,1)} a \leq x\} = [1, +\infty)$

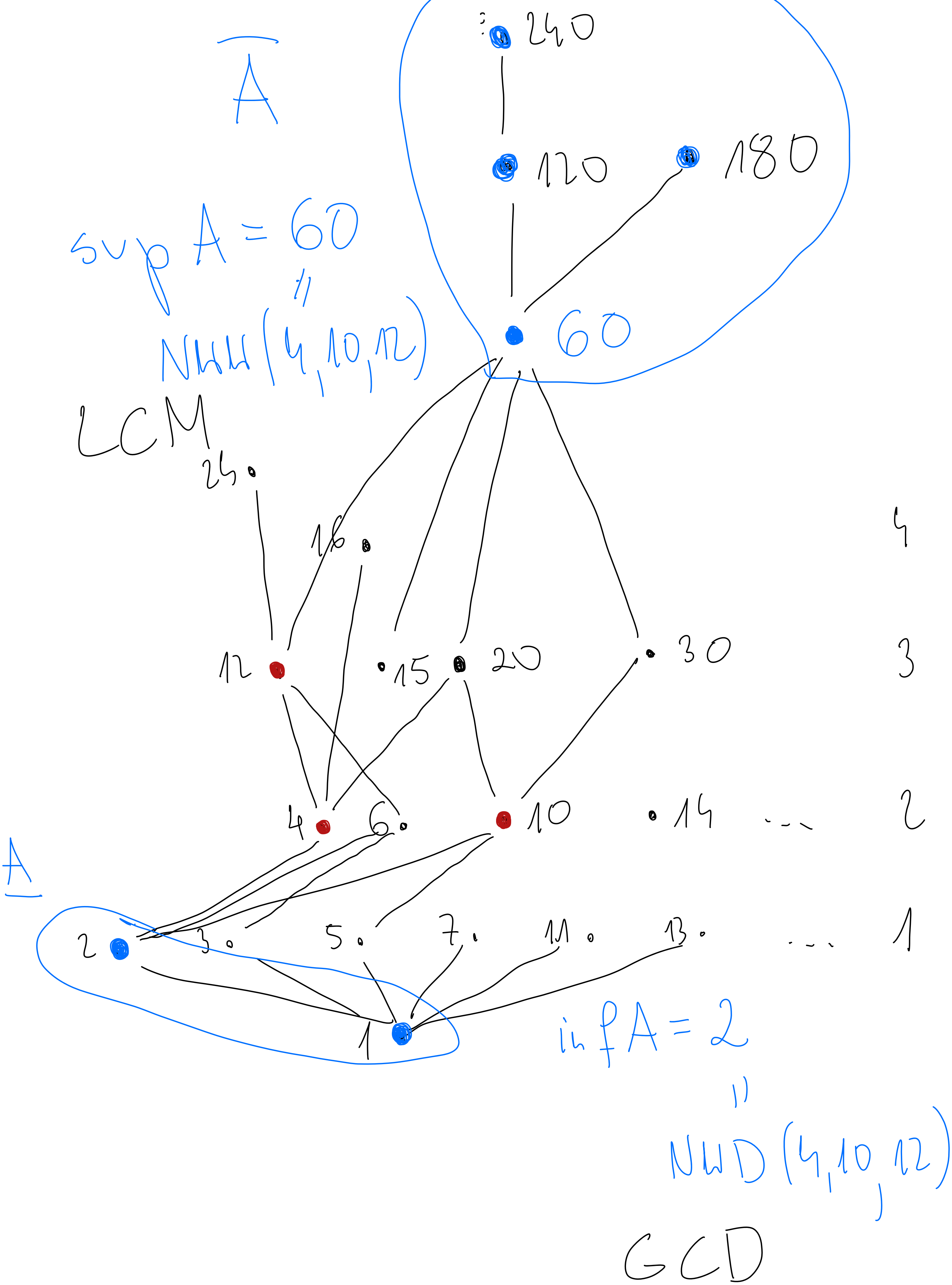
$\sup([0,1)) = 1$

$\underline{[0,1)} = \{x \in \mathbb{R} : \bigwedge_{a \in [0,1)} x \leq a\} = (-\infty, 0]$

$\inf A = 0$.

2) $(\mathbb{N}, |)$ $\quad A = \{4, 10, 12\}$

$\boxed{a | b \iff \bigvee_{k \in \mathbb{Z}} b = ka}$



$\overline{A}$
sup A = 60 = NWW(4,10,12)
LCM
240
120
180
60
24
16
12
15
20
30
4
6
10
14
2
3
5
7
11
13
1
$\underline{A}$
inf A = 2 = NWD(4,10,12)
GCD
4
3
2
1

Relacje równoważności $\equiv$

$(X, \sim)$ $\quad \sim$ - zwrotna, symetryczna, przechodnie

1) $(\mathbb{Z}, \sim)$ $\quad a, b \in \mathbb{Z}$ $\quad a \sim b \iff \underline{n \mid a-b}$

$n \in \mathbb{N}$

$$a \sim b \iff \bigvee_{k \in \mathbb{Z}} a - b = kn$$

•) zwrotna? ✓

$$\bigwedge_{a \in \mathbb{Z}} a \sim a \iff \bigwedge_{a \in \mathbb{Z}} n \mid a - a \iff$$

$$\iff \bigwedge_{a \in \mathbb{Z}} n \mid 0 . \quad (T)$$

•) symetryczna? ✓

$$\bigwedge_{a,b \in \mathbb{Z}} a \sim b \Rightarrow b \sim a \iff$$

$$\iff \underbrace{\bigwedge_{a,b \in \mathbb{Z}} \bigvee_{k \in \mathbb{Z}} a - b = kn}_{} \Rightarrow \bigvee_{k' \in \mathbb{Z}} b - a = k'n$$

$$\underbrace{\bigvee_{k \in \mathbb{Z}} b - a = (-k) \cdot n}_{}$$

$k' := -k$

•) przechodnia? ✓

$$\bigwedge_{a,b,c\in\mathbb{Z}} a\sim b \wedge b\sim c \Rightarrow a\sim c$$

$$\bigwedge_{a,b,c\in\mathbb{Z}} \underbrace{\bigvee_{k\in\mathbb{Z}} a-b=kn \wedge \bigvee_{k'\in\mathbb{Z}} b-c=k'n}_{} \Rightarrow \bigvee_{k''\in\mathbb{Z}} a-c=k''n$$

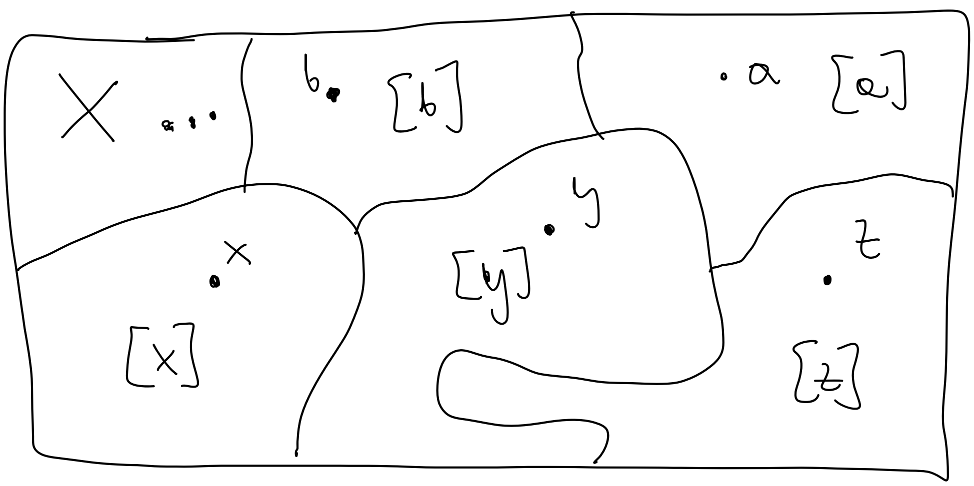
$$a-c=(a-b)+(b-c)=kn+k'n=\underbrace{(k+k')}_{k''}n$$

$$\boxed{\sim \text{ jest relacją równoważności}}$$

$<\ \rightsquigarrow\ \leqslant \qquad \sim\ \rightsquigarrow\ =$

Klasa abstrakcji, $x\in X \qquad (X,\sim)$

$$[x]=\{y\in X: x\sim y\}$$

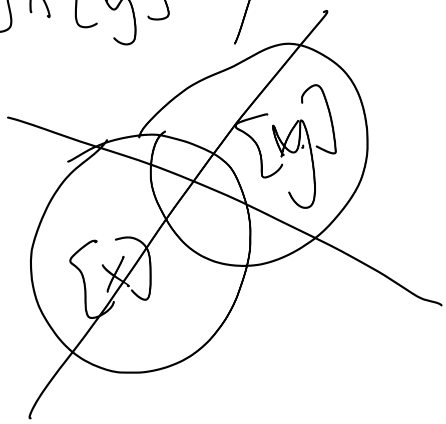


Tw. (Zasada abstrakcji) $(X, \sim)$

1) $\bigwedge_{x \in X} x \in [x]$

2) $X = \bigcup_{x \in X} [x]$

3) $\bigwedge_{x,y \in X} [x] \cap [y] = \emptyset \ \vee \ [x] \cap [y] = [x] = [y].$



zbiór wszystkich klas abstrakcji oznaczamy

$$\underbrace{X/\sim}_{\text{zbiór ilorazowy}}$$

$(\mathbb{Z}, \sim)$ $\quad a \sim b \iff 4 \mid a-b$

$[0] = \{0, 4, -4, 8, -8, \dots\} = \{4k : k \in \mathbb{Z}\}$

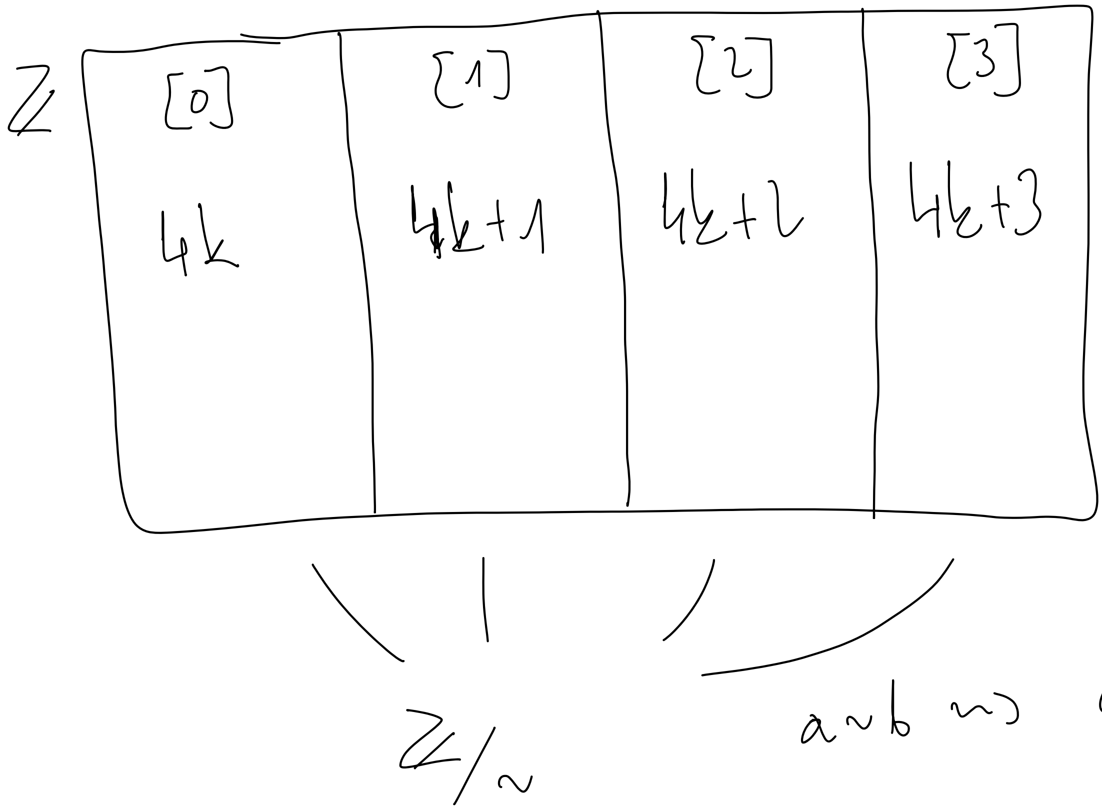
$[1] = \{1, 5, -3, 9, -7, \dots\} = \{4k+1 : k \in \mathbb{Z}\}$

$[2] = \{2, 6, 10, 14, \dots, -2, -6, -10, \dots\} = \{4k+2 : k \in \mathbb{Z}\}$

$[3] = \{3, 7, 11, 15, \dots, -1, -5, -9, \dots\} = \{4k+3 : k \in \mathbb{Z}\}$

$[4] = [0] = [-4] = [120] = \dots$

$[7] = [3] = [-1] = \dots$



$a \sim b \rightsquigarrow a \equiv b \pmod n$

Teoria liczb

$$a \mid b \iff \bigvee_{k\in\mathbb{Z}} b = ka$$

$(\mathbb{Z}, \mid)$

$a\in\mathbb{Z}$ $a \mid a$

jest zwrotna w $\mathbb{Z}$
i przechodnia,
ale nie jest antysym.

$1 \mid -1 \wedge -1 \mid 1 \wedge 1 \neq -1$

$\boxed{0 \mid 0} \iff \bigvee_{k\in\mathbb{Z}} 0 = k\cdot 0$

T

---

19 5 $19 = 3\cdot 5 + 4$

iloraz reszta

Tw. (o dzieleniu z resztą) Jeżeli $m\in\mathbb{Z}$ i $n\in\mathbb{N}$ to istnieje dokładnie jedna para liczb $q, r\in\mathbb{Z}$, dla których

$$m = q\cdot n + r$$

oraz

$$\boxed{0 \le r < n}.$$

iloraz reszta

1) Istnienie

$q = \, ?$!

$r = m - qn$

2) Jedyność