Relacje porządku

$$X, \quad R \subset X \times X$$

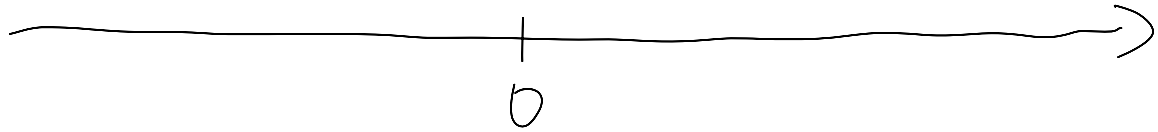
Relację R nazwiemy relacją (częściowego) porządku, jeśli jest ona zwrotna, antysymetryczna i przechodnia.

1. $(\mathbb{R}, \leq)$

$\bullet)\ \bigwedge_{x \in \mathbb{R}} x \leq x$

$\bullet)\ \bigwedge_{x,y \in \mathbb{R}} (x \leq y \wedge y \leq x) \Rightarrow x = y$

$\bullet)\ \bigwedge_{x,y,z \in \mathbb{R}} (x \leq y \wedge y \leq z) \Rightarrow x \leq z$



2. $(\mathbb{N}, |)$ $\qquad x | y \iff \bigvee_{k \in \mathbb{N}} y = kx$

$\bullet)\ \bigwedge_{x \in \mathbb{N}} x | x$ $\quad$ T

$\bullet)\ \left[\bigwedge_{x,y \in \mathbb{N}} (x|y \wedge y|x) \Rightarrow x = y\right] \iff$

$$\left[\bigwedge_{x,y \in \mathbb{N}} \bigvee_{k \in \mathbb{N}} y = kx \wedge \bigvee_{m \in \mathbb{N}} x = my \Rightarrow x = y\right] \iff$$

$$\iff \bigwedge_{x,y \in \mathbb{N}} \bigvee_{k,m \in \mathbb{N}} y = kx \wedge \underbrace{x = mkx}_{\substack{x(mk-1)=0 \\ mk=1 \Rightarrow m=k=1}}$$

$\bullet) \bigwedge_{x,y,z\in N} x|y \wedge y|z \Rightarrow x|z$

$$\underbrace{\bigvee_{k\in N} y=kx \wedge \bigvee_{m\in N} z=my}$$

$$\Downarrow$$

$$z=mkx \Rightarrow x|z$$

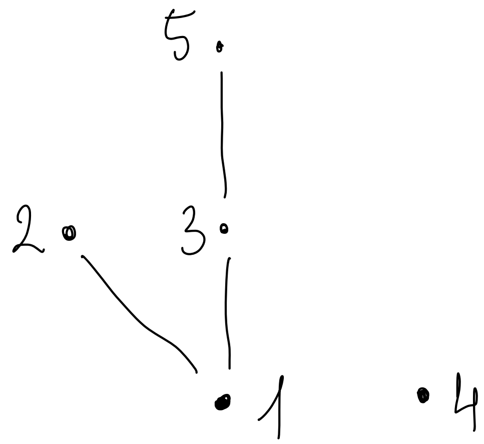
Jeżeli relacja porządku (częściowego) jest dodatkowo <u>spójna</u>, to relację tę nazywamy relacją porządku <u>całkowitego</u> lub <u>liniowego</u>.

(X, R) $\rightsquigarrow$ $\prec$ $\qquad (X, \prec)$

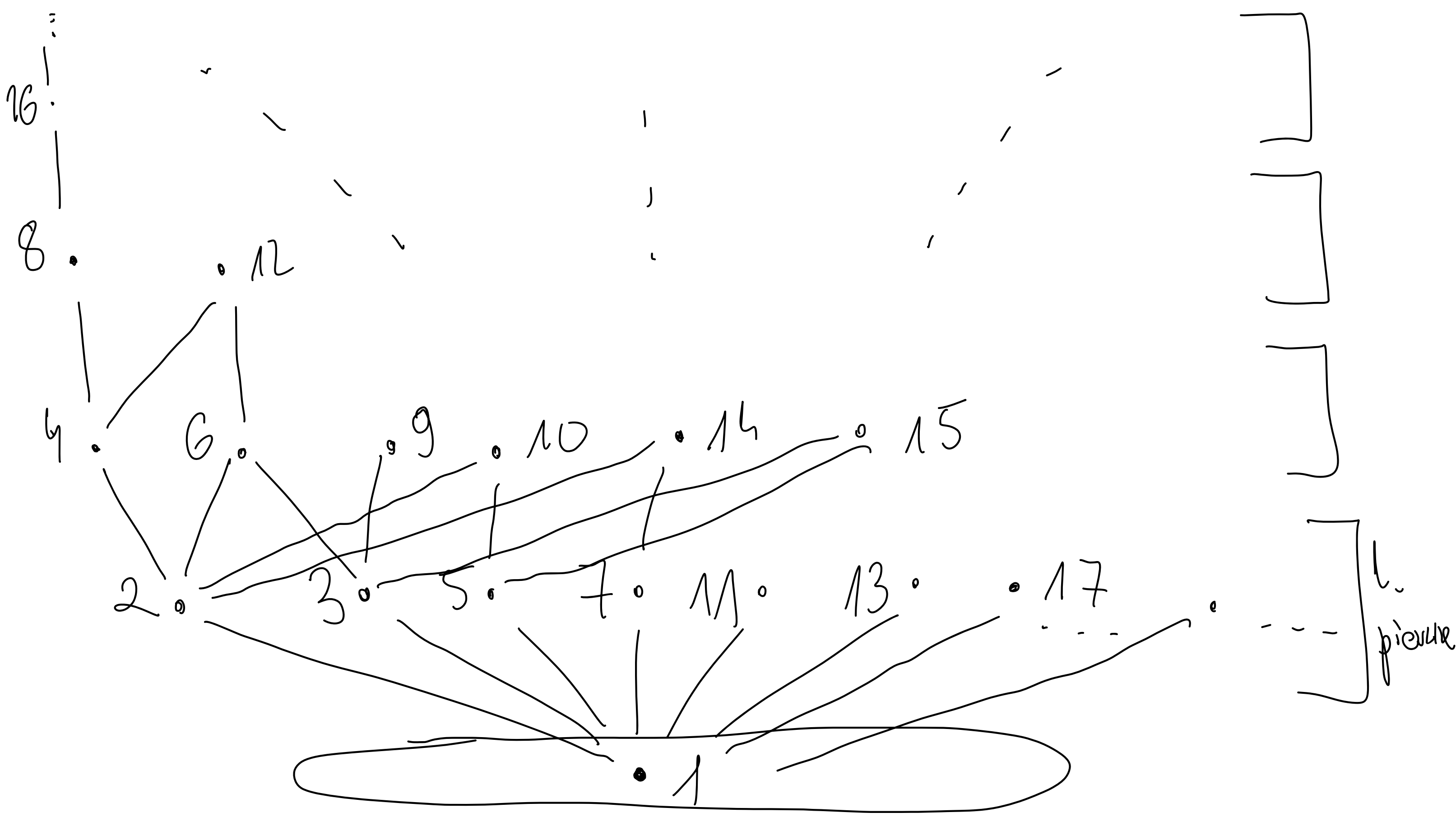
---

3. $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\prec \subset X \times X$,

$\prec = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (1,2), (1,3), (1,5), (3,5)\}$

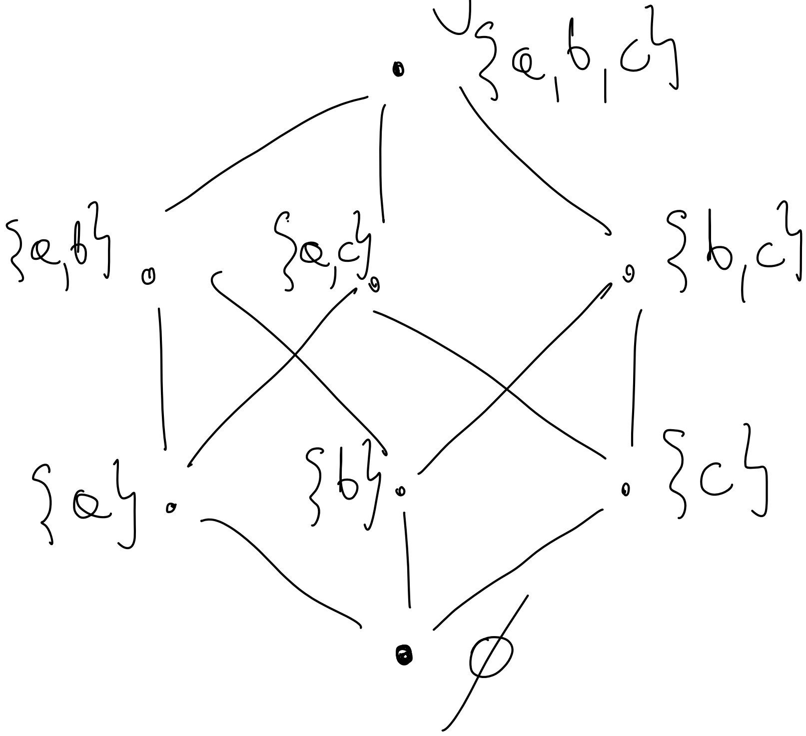


2. $(\mathbb{N}, |)$



3. $A=\{a,b,c\}$, $X=2^A=\mathcal{P}(A)$

$x,y\in X$ $\quad x\prec y \iff x\subset y$



Elementy wyróżnione

Elementy minimalne i maksymalne

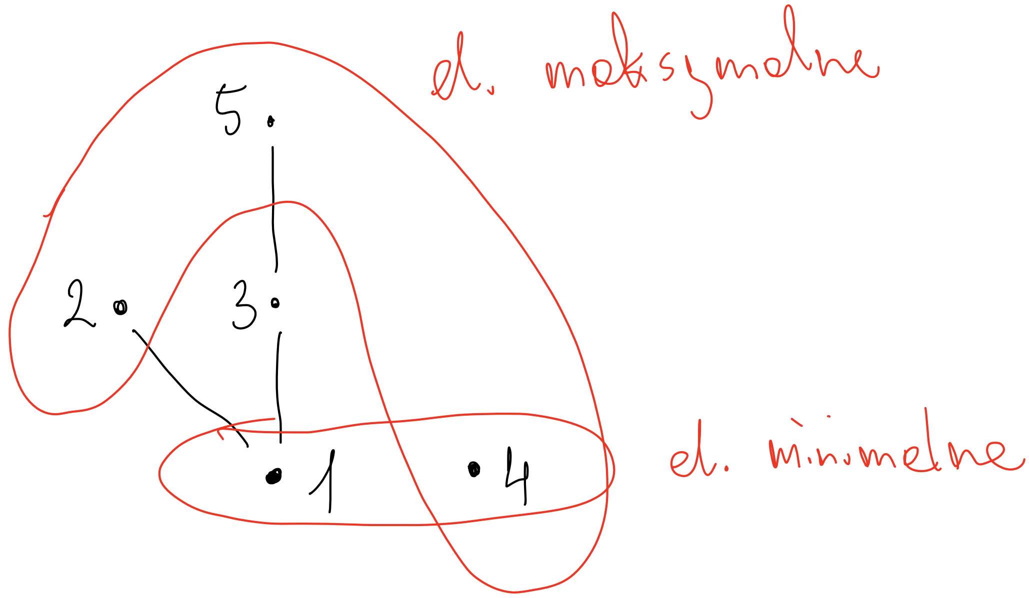
- el. minimalny: $x\in X$

$$\bigwedge_{y\in X} y\prec x \Rightarrow y=x.$$

- el. maksymalny: $x\in X$

$$\bigwedge_{y\in X} x\prec y \Rightarrow y=x.$$

3.



Elementy najmniejsze i największe

el. najmniejszy: $x \in X$

$$\bigwedge_{y \in X} x \leq y$$

el. największy: $x \in X$

$$\bigwedge_{y \in X} y \leq x$$

·) $(\mathbb{N}, |)$

·) $([0,1), \leq)$

el. min: 0

el. maks.: —

najm.: 0

najw.: —

$$\frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \ldots = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = 1$$

$$\|$$

$$\boxed{0.999\ldots(9) = 1}$$

Tw. Jeżeli w zbiorze X istnieje el. najmniejszy / największy, to jest on jedyny.

Dowód. Załóżmy, że x i y są el. najmniejszymi. Wtedy $x \prec y$ (bo x jest najm.) i $y \prec x$ (bo y jest najm.), więc $x = y$ na mocy antysymetryczności relacji porządku.

Tw. Jeżeli X jest zbiorem skończonym, to istnieją w nim el. minimalne i maksymalne.

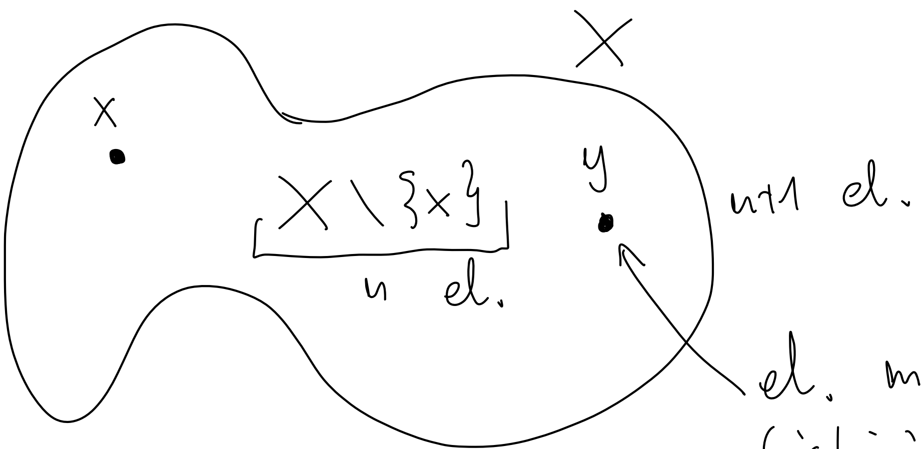
Dowód. Indukcja względem liczby elementów X.

1. $\#X = 1 \Rightarrow X = \{x\} \Rightarrow x$ jest el. maks.

Niech $n \in \mathbb{N}$.

2. (Z) $\#X = n \Rightarrow$ istnieje el. maks. w X

(T) $\#X = n+1 \Rightarrow$ — " —



el. maks. w $X \setminus \{x\}$ (istnieje na mocy (Z))

I. $x \prec y$

y jest maks. w X

II. $y \prec x$

x jest maks. w X

$x \prec z$ — $y \prec z$

przechodniość

III. x nie jest w rel. z y

$\neg(x \prec y) \wedge \neg(y \prec x)$

y jest el. maks w X

Tw. Jeżeli X jest skończony i ma dokładnie jeden el. minimalny / maksymalny, to ten el. jest najmniejszy / największy.

$(X, \prec)$ $A \subset X$ $(A, \prec)$

$(\mathbb{R}, \leqslant)$ $\underbrace{([0,1), \leqslant)}$

$x \in X$ jest ograniczeniem górnym zb. A, jeżeli

$$\bigwedge_{a \in A} a \prec x$$