LOGIKA

$\wedge$	koniunkcja	... i ...
$\vee$	alternatywa	... lub ...
$\Rightarrow$	implikacja	jeśli ..., to ...
$\Leftrightarrow$	równoważność	... wtedy i tylko wtedy, gdy ...
$\neg$ / $\sim$	negacja	nie ...

zmienne logiczne

1/0 T/F

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

i

p	q	$p \circ q$	
1	1	1/0	2
1	0	1/0	2
0	1	1/0	2
0	0	1/0	2

$2^4 = 16$

p	$\circ p$	
1	1/0	2
0	1/0	2

$2^2 = 4$

$\circ(p, q, r) \Rightarrow 1/0 \qquad 2^8$

$\underbrace{1/0 \quad 1/0 \quad 1/0}$

$2 \quad 2 \quad 2$

$2^3 = 8$

$\wedge \quad \vee \quad \Rightarrow \quad \Leftrightarrow$

$p \oplus q$ – alternatywa wykluczająca
albo
xor (exclusive or)

$p \oplus q = \underbrace{(p \wedge \neg q)} \vee (\neg p \wedge q)$

p XOR q

$p \mid q$ – kreska Sheffera, NAND (NOT $\downarrow$ NAND)

$p \mid q = \neg(p \wedge q)$

p NAND q

$p \downarrow q$ – strzałka Pierce'a NOR (NOT $\downarrow$ NOR)

$p \downarrow q = \neg(p \vee q)$

p NOR q

jeśli p, to q

						XOR	NAND	NOR
p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$	$p \oplus q$	$p \mid q$	$p \downarrow q$
1	1	1	1	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0	1	1	0
0	1	0	1	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1	0	1	1

$$\{p \mid [(q \Rightarrow (\neg r)) \vee (s \wedge q)]\} \oplus [p \downarrow (q \Rightarrow p)]$$

Def. Formuła logiczna

1) Pojedyncza zmienna logiczna jest formułą logiczną.

p, q, r

$p_1, p_2, \ldots$

2) Jeżeli φ i ψ są formułami logicznymi, to
$$(\varphi \circ \psi)$$
jest formułą logiczną dla dowolnego funktora dwuargumentowego $\circ$.

3) Jeżeli φ jest formułą logiczną, to
$$(\neg \varphi)$$
jest formułą logiczną.

4) Nic innego nie jest formułą logiczną.

$p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$

p	q	$q \Rightarrow p$	$p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$
1	1	1	1
1	0	1	1
0	1	0	1
0	0	1	1

Def. Wartościowaniem zmiennych logicznych nazywamy dowolną funkcję, która każdej zmiennej logicznej przyporządkowuje 0 lub 1.

valuation

$$v : \{p, q, r, \dots, p_1, p_2, \dots\} \to \{0, 1\}$$

Def. Tautologią nazywamy formułę, która dla dowolnego wartościowania zmiennych (w niej występujących) przyjmuje wartość 1.

$p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$	$\{0,1\}^2 \to \{0,1\}$
formuła	funkcja logiczna

Def. Formuły φ i ψ nazwiemy równoważnymi, jeśli dla każdego wartościowania v mamy

$$v(\varphi) = v(\psi).$$

Piszemy wtedy

$$\varphi \equiv \psi.$$

Tw. (Prawa rachunku zdań)

$$p \wedge q \equiv q \wedge p \qquad p \Leftrightarrow q \equiv q \Leftrightarrow p$$
$$p \vee q \equiv q \vee p \qquad p \oplus q \equiv q \oplus p$$
$$p \mid q \equiv q \mid p \qquad p \downarrow q \equiv q \downarrow p$$

prawa przemienności

$$p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$$
$$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$$
$$(p \oplus q) \oplus r \equiv p \oplus (q \oplus r)$$

prawa łączności

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$
$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

?

prawa rozdzielności

$$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$
$$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$$

prawa de Morgana

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$	$p \vee q$	$p \vee r$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0

$$p \vee (q \wedge r) \iff (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

jest tautologią według zdań.

n zmiennych $\longrightarrow$ 2^n przypadków