(1) $1^2+2^2+3^2+\dots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $n \in \mathbb{N}$

(I) $\underline{n=1}$ $\quad 1^2 \overset{?}{=} \frac{1\cdot(1+1)(2\cdot 1+1)}{6}$

$1 = \frac{2\cdot 3}{6}$ ✓

(II) (Z) $1^2+2^2+\dots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

dla pewnego $n \in \mathbb{N}$.

(T) $1^2+2^2+\dots+n^2+(n+1)^2 = \boxed{\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}}$

$\boxed{1^2+2^2+\dots+n^2+(n+1)^2} \overset{(Z)}{=} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$

$= \frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6} = \frac{(n+1)[n(2n+1)+6(n+1)]}{6}$

$= \frac{(n+1)[2n^2+7n+6]}{6}$

$\frac{\cancel{(n+1)}(2n^2+7n+6)}{\cancel{6}} \overset{?}{=} \frac{\cancel{(n+1)}(n+2)(2n+3)}{\cancel{6}}$

$2n^2+7n+6 \overset{?}{=} 2n^2+3n+4n+6$ ✓

(2) $(1+x)^n \geq 1+nx$, $x \geq -1$, $n \in \mathbb{N}$

(I) $n = 1$

$$(1+x)^1 \overset{?}{\geq} 1 + 1 \cdot x$$

$$1+x \geq 1+x$$

(II) (Z) $(1+x)^n \geq 1+nx$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$

(T) $(1+x)^{n+1} \geq \underbrace{1+(n+1)x}$

$$(1+x)^{n+1} = \underbrace{(1+x)^n} \cdot (1+x) \boxed{\geq} (1+nx)(1+x) =$$

(Z) $\geq 1+nx$

$x \geq -1$

≥ 0

$$= 1 + x + nx + nx^2 = \underbrace{1+(n+1)x} + nx^2$$

$$\geq 1+(n+1)x$$

$p(1), p(2), \ldots$

$p(0), p(1), p(2), \ldots$

$p(5), p(6), \ldots$

$p(-13), p(-12), \ldots$

$p(n_0), p(n_0+1), p(n_0+2), \ldots$

Zasada indukcji (od $n_0 \in \mathbb{Z}$)

Jeżeli

1) $p(n_0)$ jest prawdą,
2) jeżeli $p(n)$ jest prawdą dla pewnego $n \geq n_0$, to $p(n+1)$ jest prawdą,

to $p(n)$ jest prawdą dla dowolnego $n \geq n_0$.

(3) Pokażemy, że każdą liczbę całkowitą $n \geq 0$ można przedstawić w postaci dwójkowej.

$n \geq 0$ $\quad n = \boxed{(c_k c_{k-1} \ldots c_1 c_0)_2}$, $c_i \in \{0,1\}$

$= c_k 2^k + c_{k-1} 2^{k-1} + \ldots + c_1 \cdot 2^1 + c_0 \cdot 2^0$

(I) $n = 0$ $\quad 0 = (0)_2$

(II) (2) Dla pewnego $n \in \mathbb{N}$ wszystkie liczby od 0 do n mają ~~ma~~ repr. dwójkową.

(T) $n+1$ też ma repr. dw.

n jest parzyste

$n = (c_k c_{k-1} \ldots c_1 c_0)_2$

$n = (c_k c_{k-1} \ldots c_1 0)_2$

wtedy

$n+1 = (c_k c_{k-1} \ldots c_1 0)_2 + (1)_2 = (c_k c_{k-1} \ldots c_1 1)_2$

n jest nieparzyste

n+1 jest parzyste

Skoro n+1 jest liczbą parzystą, to istnieje liczba $m \geq 1$, dla której

$n+1 = 2m$. $\quad m \leq n$?

$m = \frac{n+1}{2} \leq n$?

$n+1 \leq 2n$

$1 \leq n$ ✓

2 zał. $m = (c_k c_{k-1} \dots c_1 c_0)_2$.

Stąd

$n+1 = 2m = (c_k c_{k-1} \dots c_1 c_0 0)_2$.

Zasada indukcji zupełnej

$p(n_0)$, $p(n_0+1)$, $p(n_0+2)$, ...

Zasada indukcji (od $n_0 \in \mathbb{Z}$)

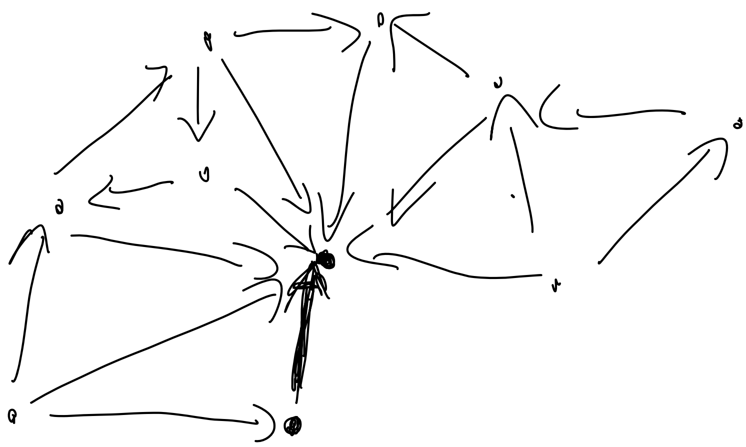
Jeżeli

1) $p(n_0)$ jest prawdziwe,

2) dla pewnego $n \geq n_0$ (jeżeli $p(k)$ jest prawdziwe dla $k \in \{n_0, n_0+1, \dots, n\}$, to $p(n+1)$ jest prawdziwe).

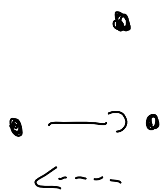
to $p(n)$ jest prawdziwe dla dowolnego $n \geq n_0$.

4) W pewnym państwie jest n miast. Każdą parę miast jest połączona jedną drogą jednokierunkową. Uzasadnijmy, że istnieje w tym państwie droga łącząca wszystkie miasta (można odbyć podróż przejeżdżając przez wszystkie miasta).



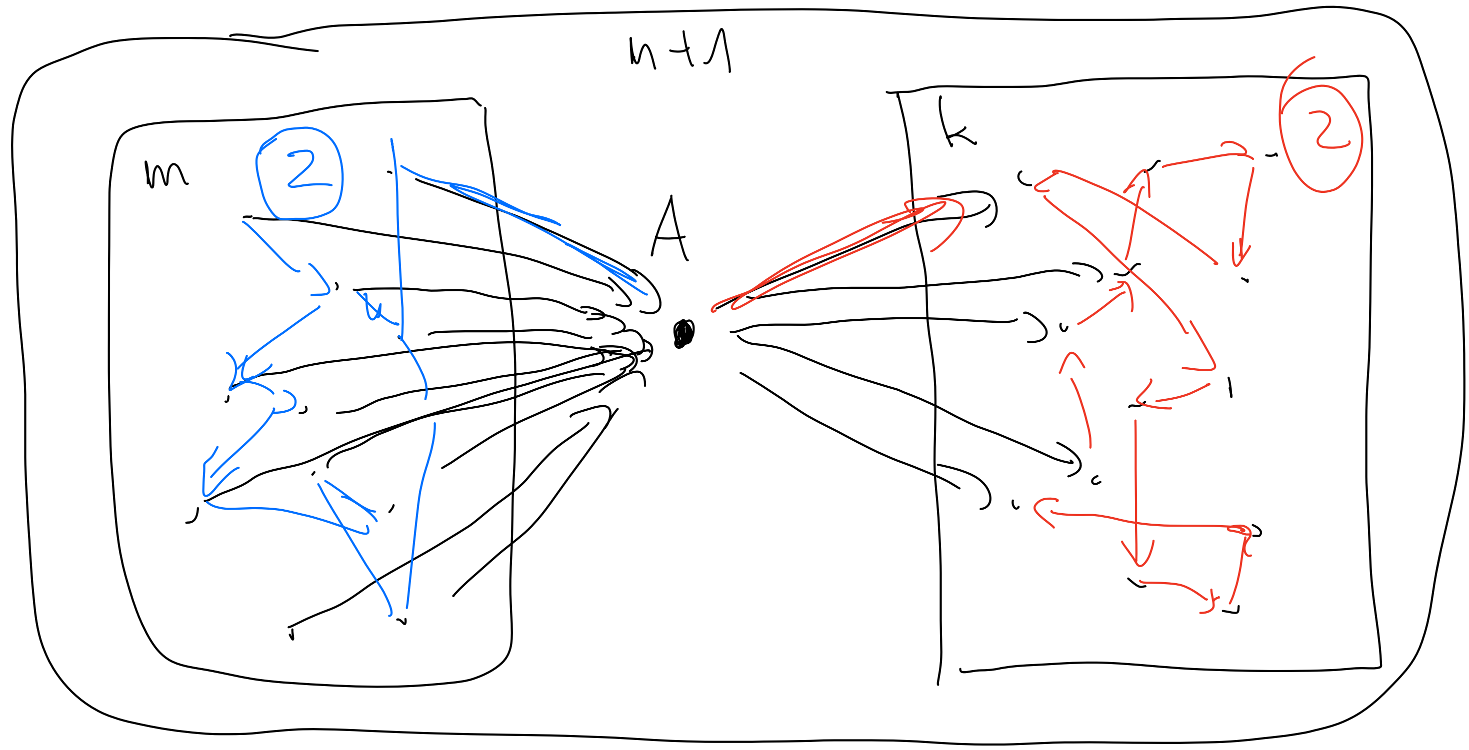
I) $n = 1$

$n = 2$



II) 2) Dla pewnego $n \in \mathbb{N}$ w każdym państwie, które ma $k \leq n$ miast taka droga istnieje.

(T) Istnieje droga dla n+1 miast.



droga $\longrightarrow$ A $\longrightarrow$ droga

5

A grane B