I

$$(A\cup B)^c = A^c \cap B^c$$
$$(A\cap B)^c = A^c \cup B^c$$
prawa de Morgana

A, B, C

II

$$A\setminus(B\cup C) = (A\setminus B)\cap(A\setminus C)$$
$$A\setminus(B\cap C) = (A\setminus B)\cup(A\setminus C)$$
prawa de Morgana

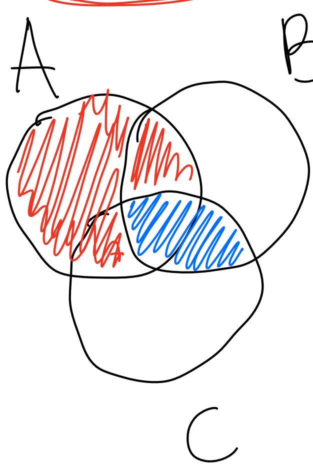
$A, B, C \subset X$, $A = X$

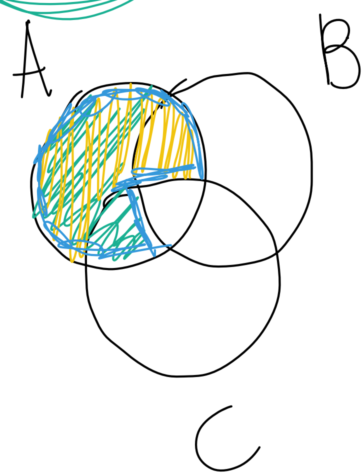
$$\boxed{A^c = X\setminus A}$$

$$X\setminus(B\cup C) = (X\setminus B)\cap(X\setminus C)$$
$$(B\cup C)^c = B^c \cap C^c$$

Udowodnimy, że dla dowolnych zbiorów A, B, C,

$$A\setminus(B\cap C) = (A\setminus B)\cup(A\setminus C).$$





$$\underbrace{A\setminus(B\cap C)}_{L} = \underbrace{(A\setminus B)\cup(A\setminus C)}_{P}$$

$A = B$

$A\subset B$ i $B\subset A$

Pokażemy, że $L\subset P$ i $P\subset L$.

Niech $x\in L$. Musimy sprawdzić, że $x\in P$.

Z faktu, że $x\in L$ wynika, że

$x\in A$ i $\underbrace{x\notin B\cap C}$.

Skoro $x\notin B\cap C$, to $x\notin B$ lub $x\notin C$.

1) Jeżeli $x\notin B$, to $x\in A\setminus B$. Jednak $A\setminus B\subset (A\setminus B)\cup(A\setminus C) = P$, czyli $x\in P$.

2) Jeżeli $x\notin C$, to $x\in A\setminus C$. Jednak $A\setminus C\subset (A\setminus B)\cup(A\setminus C) = P$, czyli $x\in P$.

$\hookrightarrow$ W obu przypadkach $x\in P$.

$L\subset P$

Niech $x\in P$, więc $x\in A\setminus B$ lub $x\in A\setminus C$.

1) Jeżeli $x\in A\setminus B$, to $x\in A$ i $x\notin B$.

Ponieważ $x\notin B$, to $x\notin B\cap C$, więc $x\in A$ i $x\notin B\cap C$. Ostatecznie $x\in A\setminus(B\cap C) = L$.

$P\subset L$.

Para uporządkowana (a, b)

$$(a,b) \overset{\text{def.}}{=} \{\{a\}, \{a,b\}\}$$

Pokażemy, że (a,b) jest naprawdę parą uporządkowaną, to znaczy

$$(a,b) = (c,d)$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$a = c \quad i \quad b = d.$$

$(a,b) = (c,d)$ oznacza, że

$$\{\{a\}, \{a,b\}\} = \{\{c\}, \{c,d\}\}$$

$\{a\} = \{c\}$ i
$\{a,b\} = \{c,d\}$

$a = c$

$\{a,b\} = \{a,d\}$

$b = d$

$\{a\} = \{c,d\}$

$\{a,b\} = \{c\}$

Ponieważ zbiór $\{a\}$ ma jeden element a, to $\{c,d\}$ też ma jeden element równy a, więc

$$c = d = a.$$

Wtedy $\{a,b\} = \{c\} = \{a\}$, więc $b = a$.

(a, b)

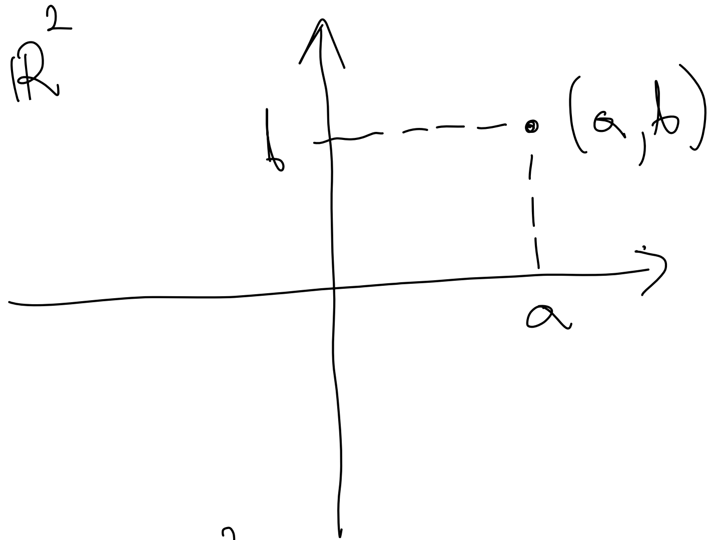
A, B

$A \times B$ – iloczyn kartezjański

$A \times B = \{x : x = (a, b),$ gdzie $a \in A$ i $b \in B\}$

$= \{(a, b) : a \in A$ i $b \in B\}$

$\mathbb{R}^2$



$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$

$A \times A = A^2$

---

a, b, c

$(a, b, c) \overset{\text{def.}}{=} ((a, b), c)$

$(a_1, \dots, a_{n-1}, a_n) = ((a_1, \dots, a_{n-1}), a_n)$

$A, B, C \qquad A\times B\times C = \{(a,b,c): a\in A, b\in B, c\in C\}$

$A\times A\times A = A^3$

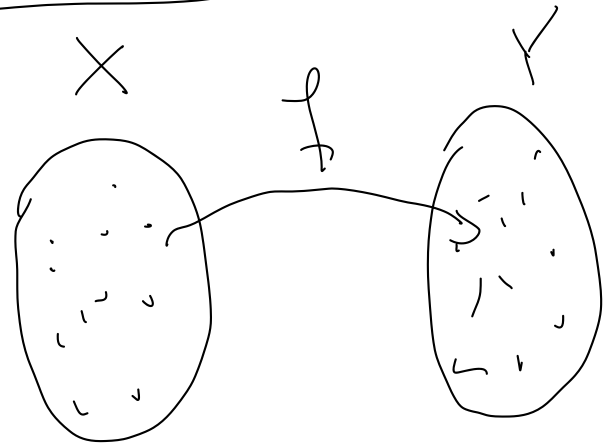
Funkcja

↓

przekształcenie

↓

odwzorowanie



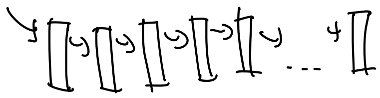
Dla zbiorów X i Y funkcją nazwiemy dowolny podzbiór f iloczynu $X\times Y$, spełniający warunki

1) dla każdego $x\in X$ istnieje $y\in Y$, dla którego $(x,y)\in f$,

2) jeżeli $(x,y_1)\in f$ oraz $(x,y_2)\in f$, to $y_1 = y_2$.

$\boxed{(x,y)\in f} \rightsquigarrow f(x) = y$

Indukcja matematyczna



$p(1),\ p(2),\ p(3),\ \ldots,\ p(n),\ \ldots \quad n \in \mathbb{N}$

zdanie/sformułowanie (prawdziwe lub fałszywe)

Zasada indukcji:

Jeżeli

1) $p(1)$ jest zdaniem prawdziwym,
2) dla każdego $n \in \mathbb{N}$:
   ~~jeżeli~~ $p(n)$ jest zdaniem prawdziwym,
   to $p(n+1)$ jest zdaniem prawdziwym,

to dla każdego $n \in \mathbb{N}$, $p(n)$ jest zdaniem prawdziwym.

Przykład. $1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, \ldots$

$1 = 1$ $\quad 1^2$

$1 + 3 = 4$ $\quad 2^2$

$1 + 3 + 5 = 9$ $\quad 3^2$

$1 + 3 + 5 + 7 = 16$ $\quad 4^2$

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$ $\quad 5^2$

Pokażemy, że dla dowolnej liczby $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2. \qquad p(n)$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

$$\sum_{i=1}^{n} (2i-1) = n^2$$

$p(n)$: $1+3+5+\ldots+(2n-1) = n^2$

1) $p(1)$: $1 \stackrel{?}{=} 1^2$ ✓

2) Niech $n \in \mathbb{N}$. Załóżmy, że $p(n)$ jest prawdą, to znaczy

(2) $1+3+5+\ldots+(2n-1) = n^2$.

Zdanie $p(n+1)$ mówi, że

(T) $1+3+5+\ldots+(2n-1)+(2n+1) = (n+1)^2$.

Zauważmy, że

$$\underbrace{1+3+5+\ldots+(2n-1)}+(2n+1) \stackrel{(2)}{=}$$

$$= n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2. \quad \text{(T)}$$