Adam Gregosiewicz

Matematyka dyskretna dla informatyków

9 października 2024

Ostatnia aktualizacja: 09.10.2024 18:35:28

1

Naiwna teoria mnogości

Zbiór stanowi jedno z najbardziej podstawowych pojęć matematyki oraz języka potocznego. Posługujemy się nim niemal instynktownie, rozważając zbiory punktów, liczb, funkcji, ale też ludzi czy przedmiotów. *Teoria mnogości* jest działem matematyki badającym ogólne własności zbiorów, niezależnie od tego, z jakich elementów zostały one zbudowane. Skupimy się na tak zwanej *naiwnej* teorii mnogości, która bazuje na intuicyjnym traktowaniu zbiorów jako kolekcji dowolnych obiektów. Będziemy rozważać podstawowe operacje i relacje między zbiorami, bez wprowadzania skomplikowanych formalizmów. Umożliwi to nam na tyle sprawne posługiwanie się pojęciem zbioru, że z powodzeniem będziemy mogli stosować konstrukcje i wyniki teorii mnogości w innych fragmentach matematyki lub informatyki.

Należy jednak być świadomym, że podejście naiwne ma swoje ograniczenia. Prowadzą one do antynomii, to znaczy sprzeczności logicznych, o których trochę opowiemy później. W „prawdziwej" teorii mnogości, trochę bardziej skomplikowanej, próbuje się rozwiązać te problemy poprzez wprowadzenie precyzyjnych aksjomatów określających, czym są zbiory i jakie operacje można na nich wykonywać. Powszechnie przyjętym współcześnie systemem aksjomatów jest teoria Zermelo–Fraenkla pochodząca z początków XX wieku.

1.1. Podstawowe pojęcia i oznaczenia

W teorii mnogości występują dwa pojęcia pierwotne – *zbiór* oraz *relacja należenia* do zbioru. Pojęć tych nie definiujemy, więc w szczególności nie mówimy, czym zbiór w istocie *jest*.[1] Stwierdzenie, że x należy do zbioru A zapisujemy krótko

$$x \in A.$$

Mówimy wtedy również, że *x jest elementem* zbioru A. Fakt, że *x nie jest* elementem zbioru A oznaczamy przez

$$x \notin A.$$

Przyjmujemy, zgodnie chyba z naszym wyobrażeniem, że zbiór jest w pełni scharakteryzowany przez swoje elementy. Nieco bardziej precyzyjnie powiemy, że zbiory A i B są *równe*, jeżeli mają te same elementy, to znaczy

dla każdego x zachodzi $x \in A$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in B$.

1 Podobnie postępujemy na przykład w szkolnej geometrii elementarnej, nie definiując, czym jest *punkt*, *prosta* oraz co to znaczy, że punkt *leży na* prostej.

Piszemy wtedy $A = B$. Jeżeli zbiory A i B nie są równe, to mówimy, że są one *różne*, co w skrócie oznaczamy przez $A \neq B$. Możemy też równoważnie powiedzieć, że dwa zbiory są równe, jeżeli dowolny x należy do obu rozważanych zbiorów lub nie należy do żadnego z nich, czyli

$$x \in A \text{ i } x \in B \qquad \text{lub} \qquad x \notin A \text{ i } x \notin B.$$

W szczególności z powyższej definicji równości wynika, że nie istnieją dwa różne zbiory, które składają się z tych samych elementów. Zakładamy również, że istnieje pewien szczególny zbiór, który nie zawiera żadnych elementów. Nazywamy go *zbiorem pustym* i oznaczamy przez $\emptyset$.

Zbiór skończony, do którego należą wyłącznie elementy a_1, a_2, $\ldots$, a_n zapisujemy w postaci

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}.$$

W szczególności, zbiór $\{a\}$ jest zbiorem składającym się z dokładnie jednego elementu a. Podobnie zbiór $\{a, b\}$ zawiera wyłącznie elementy a i b. Należy w tym miejscu podkreślić, że zbiór $\{a, b\}$ nie musi być dwuelementowy. Jeżeli bowiem $a = b$, to $\{a, b\} = \{a\} = \{b\}$.[2] W przypadku, gdy $a \neq b$, to oczywiście $\{a, b\} \neq \{a\}$. Warto też zauważyć, że przy definiowaniu zbioru przez wypisanie jego elementów, nie ma znaczenia ich kolejność ani to, ile razy został powtórzony pojedynczy element.[3] Dla dowolnych a i b mamy na przykład

$$\{a, b\} = \{b, a\} = \{a, a, b\} = \{a, b, a, b, b, a, b\}.$$

Możemy tę uwagę wyrazić następująco: zbiór nie przechowuje informacji o kolejności ani krotności elementów w nim występujących.

Liczbę elementów zbioru skończonego A oznaczamy przez $\#A$.[4] Mamy więc $\#\{a\} = 1$ oraz $\#\{a, b\} = 2$, o ile $a \neq b$. Ogólniej, jeżeli elementy a_1, a_2, $\ldots$, a_n są parami różne, czyli $a_i \neq a_j$ dla dowolnych indeksów i, j spełniających $i \neq j$, to

$$\#\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} = n.$$

Przyjmujemy też umowę, że dla zbioru A, który zawiera nieskończenie wiele elementów, piszemy $\#A = \infty$.

1.2. Zbiory liczbowe

Nie ulega wątpliwości, że zbiorami, z którymi mieliśmy najczęściej do czynienia w szkole są *zbiory liczbowe*, których elementami są liczby (całkowite, rzeczywiste, $\ldots$). Swobodnie się nimi posługiwaliśmy, mimo że nie poznaliśmy ich formalnej definicji. Trochę później zobaczymy, jak można formalnie *definiować* zbiory liczbowe, wykorzystując pojęcia teorii mnogości, na razie natomiast przypomnijmy tylko standardowe oznaczenia. Przez $\mathbb{N}$ rozumiemy zbiór liczb *naturalnych*, czyli liczb całkowitych dodatnich. To, czy 0 zaliczamy do liczb naturalnych, jest kwestią całkowicie arbitralną. Oba podejścia są dobre, ale musimy się na coś zdecydować. Przyjmujemy od tego momentu, że 0 nie jest liczbą naturalną. Zbiór $\mathbb{N}$ powiększony o 0 będziemy zapisywać w postaci $\mathbb{N}_0$. Przez $\mathbb{Z}$ oznaczamy zbiór wszystkich liczb *całkowitych*[5], a przez $\mathbb{Q}$ zbiór wszystkich liczb *wymiernych*, czyli ułamków

2 Pamiętajmy, że zbiór jest jednoznacznie wyznaczony przez swoje elementy. Wszystkie wymienione zbiory składają się z tego samego elementu.

3 Istnieje pojęcie *multizbioru*, w którym krotność elementów ma znaczenie, zob. zadanie 1.18.

4 Często używa się również symbolu $|A|$ lub $\bar{\bar{A}}$

5 Pod żadnym pozorem nie powinno się tego zbioru oznaczać przez $\mathbb{C}$, co jeszcze do niedawna było standardem w polskich szkołach.

postaci $\frac{m}{n}$ dla $m, n \in \mathbb{Z}$ i $n \neq 0$. Dla zbioru liczb rzeczywistych używamy symbolu $\mathbb{R}$. Podsumowując, mamy

$$\begin{aligned}
\mathbb{N} &= \{1, 2, 3 \ldots\}, \\
\mathbb{N}_0 &= \{0, 1, 2, \ldots\}, \\
\mathbb{Z} &= \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}, \\
\mathbb{Q} &= \big\{\text{wszystkie ułamki } \frac{m}{n} \text{ dla } m, n \in \mathbb{Z} \text{ i } n \neq 0\big\}.
\end{aligned}$$

Nie są to oczywiście formalne definicje tych zbiorów, bo używanie znaku „. . . ” jest pewnym nadużyciem. Jeszcze gorzej ma się kwestia tego, czym w istocie jest zbiór liczb rzeczywistych. Na obecnym etapie nie będzie to dla nas stanowiło problemu i w zupełności wystarczy nam intuicja szkolna. Warto może jeszcze przypomnieć, że dla liczb rzeczywistych a i b, przy czym $a < b$ wprowadzamy *przedziały*: otwarty (a, b), domknięty $\langle a, b\rangle$, lewostronnie domknięty $\langle a, b)$ i prawostronnie domknięty $(a, b\rangle$.[6] W naturalny sposób rozszerzamy definicje przedziałów w przypadku, gdy $a = -\infty$ lub $b = +\infty$.

6 Końce domknięte bywają też oznaczane nawiasami kwadratowymi. W tej konwencji na przykład przedział $\langle a, b\rangle$ zapisujemy jako $[a, b]$.

1.3. Definiowanie przez wyróżnianie

W podrozdziale 1.1 widzieliśmy, że zbiory skończone można zdefiniować przez wypisanie ich elementów. Najczęściej jednak chcielibyśmy konstruować zbiory złożone z tych i tylko tych elementów, które mają jakąś wspólną cechę, wyróżniającą je spośród wszystkich elementów. W praktyce jest to zwykle jakiś warunek, który dla pewnych elementów jest spełniony, a dla innych nie. Spróbujmy tę ideę trochę uściślić.

Przypuśćmy, że $\Phi(x)$ jest pewnym wyrażeniem zależnym od x, które po wstawieniu w miejsce x nazwy dowolnego elementu staje się prawdziwe lub fałszywe. Jeśli, dla wybranego x, wyrażenie $\Phi(x)$ jest prawdą, to powiemy, że x ma własność $\Phi(x)$. Zbiór tych i tylko tych x, które mają własność $\Phi(x)$ będziemy oznaczać przez

$$\{x \colon \Phi(x)\}.$$

Przykład 1.1. Niech $\Phi(x)$ będzie wyrażeniem

$$x \in \mathbb{Z} \text{ oraz } x^2 > 5.$$

Wtedy

$$\{x \colon \Phi(x)\} = \{\ldots, -4, -3, 3, 4, \ldots\}.$$

Taki sposób definiowania zbiorów może jednak prowadzić do pewnych problemów. Wynikają one z tego, że nie do końca precyzyjnie określiliśmy, czym jest wyrażenie $\Phi(x)$ oraz co w miejsce x możemy podstawiać.

Przykład 1.2 (Antynomia Russella)**.** Niech $\Phi(x)$ będzie wyrażeniem

$$x \text{ jest zbiorem oraz } x \notin x.$$

Wyrażenie to wygląda dość dziwnie, ale niewątpliwie po wstawieniu w miejsce x nazwy dowolnego elementu otrzymamy zdanie prawdziwe bądź fałszywe. Niech A będzie zbiorem elementów wyróżnionych przez $\Phi(x)$, to znaczy

$$A = \{x \colon \Phi(x)\} = \{x \colon x \text{ jest zbiorem oraz } x \notin x\}.$$

Na razie wszystko wygląda rozsądnie. Postawmy jednak pytanie: czy prawdą jest, że

$$A \in A?$$

Pokażemy, że nie może to być prawdą. Gdyby bowiem $A \in A$, to z definicji zbioru A prawdą byłoby

$$A \text{ jest zbiorem oraz } A \notin A,$$

co prowadzi do sprzeczności. W takim razie $A \in A$ nie może być prawdą, więc $A \notin A$. To jednak sprawia, że A ma własność wyrażoną przez $\Phi(x)$, więc $A \in A$. Ponownie otrzymaliśmy sprzeczność.

Skoro żadne ze zdań $A \in A$ i $A \notin A$ nie jest prawdziwe, to jest tu jakiś problem. Okazuje się więc, że A *nie jest zbiorem*!

Powyższy przykład, znaleziony przez Bernarda Russella na początku XX w., uświadamia nam, że nie wszystko, co przypomina zbiór, rzeczywiście zbiorem jest. Hipotetyczny zbiór skonstruowany przez Russella jest na tyle dziwny, że i tak nie spotkamy się z nim w żadnym fragmencie matematyki poza teorią mnogości. Trudno sobie przecież wyobrazić zbiór x, który sam jest swoim elementem, to znaczy $x \in x$. Może po prostu trzeba uznać, że takich zbiorów nie ma. Niestety takie podejście również prowadzi natychmiast do sprzeczności. Gdyby bowiem żaden zbiór nie był swoim elementem, to zbiór $A = \{x\colon x \text{ jest zbiorem i } x \notin x\}$ zawierałby wszystkie zbiory. Byłby zatem *zbiorem wszystkich zbiorów*. W takim razie zbiór A też by do niego należał, ale wtedy $A \in A$ i wracamy do punktu wyjścia.

Aby uniknąć napotkanych sprzeczności, musimy nieco uściślić sposób definiowania zbiorów przez wyróżnianie. Załóżmy w tym celu, że dysponujemy już jakimś zbiorem A oraz wyrażeniem $\Phi(x)$, które po wstawieniu w miejsce x dowolnego elementu zbioru A staje się zdaniem prawdziwym lub fałszywym. Różnica w stosunku do poprzedniego podejścia jest subtelna, ale istotna, gdyż zawężamy zakres zmienności zmiennej x do już istniejącego zbioru A. Zbiór tych i tylko tych x ze zbioru A, które mają własność $\Phi(x)$ oznaczamy przez

$$\{x \in A\colon \Phi(x)\}.$$

Nie ma co prawda żadnej gwarancji, że takie uściślenie definiowania przez wyróżnianie nie prowadzi do podobnych problemów, jak w przypadku antynomii Russella[7]. Panuje jednak powszechne przekonanie poparte doświadczeniem, że powyższa konstrukcja jest w jakimś sensie poprawna.

7 Mówi o tym klasyczne drugie twierdzenie Gödla o niedowodliwości niesprzeczności.

1.4. Podzbiory i zbiór potęgowy

Wprowadzimy teraz pewną relację między zbiorami, zwaną relacją *inkluzji*, która przypomina nieco znaną ze szkoły nierówność $\leqslant$. Trudno w sposób spójny i zgodny z intuicją stwierdzać, który z dwóch zupełnie dowolnych zbiorów jest mniejszy lub większy[8], ale wydaje się rozsądne powiedzieć na przykład, że zbiór $\{1, 5\}$ jest w jakimś sensie mniejszy niż zbiór $\{1, 2, 5\}$, gdyż wszystkie elementy pierwszego zbioru są też elementami drugiego zbioru.

8 Możemy co prawda porównywać na przykład liczebność zbiorów, ale zaniedbujemy wtedy zupełnie typ elementów, które do tych zbiorów należą. Takie podejście ma oczywiście sens, ale w omawianym kontekście spróbujemy na ten problem spojrzeć z innej strony.

Mówimy, że zbiór A jest *podzbiorem* zbioru B, jeżeli każdy element zbioru A należy do zbioru B. Piszemy wtedy

$$A \subset B \qquad \text{lub} \qquad B \supset A.$$

Formalnie, $A \subset B$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $x \in A$ zachodzi również $x \in B$. Możemy też powiedzieć w tej sytuacji, że zbiór A jest *zawarty* w zbiorze B lub że zbiór B *zawiera* zbiór A. Czasami mówimy też, że B jest *nadzbiorem* A. Zauważmy, że każdy zbiór jest swoim własnym podzbiorem, czyli $A \subset A$ dla dowolnego zbioru A. Jeżeli $A \subset B$ i $A \neq B$, to mówimy też, że A jest *podzbiorem właściwym* zbioru B. Łatwo sprawdzić, że bycie podzbiorem jest relacją *przechodnią*, co oznacza, że dla dowolnych zbiorów A, B i C, jeżeli $A \subset B$ i $B \subset C$, to $A \subset C$.

Może się to wydać dziwne, ale z definicji zawierania wynika również, że zbiór pusty jest podzbiorem dowolnego zbioru, to znaczy $\emptyset \subset A$ dla dowolnego A. Istotnie, każdy element należący do zbioru pustego (a takich elementów nie ma) należy też do zbioru A. Warto może jeszcze odnotować, że

$$A = B \qquad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \qquad A \subset B \text{ i } B \subset A.$$

Przykład 1.3. a) Niech $A = \{1, 5\}$, $B = \{1, 2\}$ oraz $C = \{1, 2, 5\}$. Mamy

$$A \subset C \qquad \text{oraz} \qquad B \subset C,$$

ale ani A nie jest podzbiorem B, ani B nie jest podzbiorem A.

b) Dla podstawowych zbiorów liczbowych, które wprowadziliśmy w podrozdziale 1.2, zachodzą inkluzje

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Przydatne okazuje się wyszczególnienie zbioru, który będzie zawierał wszystkie podzbiory ustalonego zbioru. *Zbiorem potęgowym* zbioru A nazywamy zbiór złożony z tych i tylko tych zbiorów B, dla których $B \subset A$. Taki zbiór oznaczamy przez $\mathcal{P}(A)$ lub 2^A. Mamy więc

$$\mathcal{P}(A) = \{B \colon B \subset A\}.$$

Należy sobie zdawać sprawę, że powyższy zapis jest nie do końca precyzyjny, gdyż, podobnie jak w antynomii Russela, nie do końca wiadomo, skąd mielibyśmy brać zbiory B. W naiwnej teorii mnogości nie musimy się tym jednak bardzo przejmować.

Warto podkreślić, że zbiór potęgowy nigdy nie jest zbiorem pustym, gdyż, jak przed chwilą zauważyliśmy, dla każdego zbioru A zachodzi $\emptyset \subset A$ oraz $A \subset A$, więc

$$\emptyset \in \mathcal{P}(A) \qquad \text{i} \qquad A \in \mathcal{P}(A)$$

dla dowolnego zbioru A. W szczególności zbiór potęgowy zbioru pustego jest zbiorem jednoelementowym, składającym się ze zbioru pustego. Innymi słowy, $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$.

Przykład 1.4. Zbiór $\{1\}$ ma dokładnie dwa podzbiory, zbiór pusty oraz $\{1\}$, co oznacza, że $\mathcal{P}(\{1\}) = \{\emptyset, \{1\}\}$. Analogicznie $\mathcal{P}(\{1,2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$ oraz

$$\mathcal{P}(\{1,2,3\}) = \big\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\big\}.$$

Pokażemy teraz, że liczbę elementów zbioru potęgowego można bardzo łatwo wyznaczyć, znając liczbę elementów zbioru wyjściowego. Uzasadnimy w ten sposób sensowność zapisu 2^A dla zbioru potęgowego zbioru A.

Twierdzenie 1.5. *Dowolny zbiór n-elementowy, przy czym $n \geqslant 0$, ma dokładnie 2^n podzbiorów.*

Dowód. Zbiór pusty ma dokładnie jeden podzbiór, który sam jest zbiorem pustym, więc teza twierdzenia zachodzi dla $n = 0$ w sposób oczywisty. Niech zatem $n \geqslant 1$ i rozważmy zbiór $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Aby skonstruować dowolny z jego podzbiorów $B \subset A$, możemy po kolei dla $i = 1, \ldots, n$ wybierać, czy element a_i będzie znajdować się w zbiorze B, czy też nie. Dokonamy w ten sposób n niezależnych wyborów, a w każdym z nich podejmiemy jedną z dwóch decyzji, co oznacza, że różnych podzbiorów jest $2 \cdot \ldots \cdot 2 = 2^n$. □

1.5. Operacje na zbiorach

Z danych zbiorów możemy tworzyć nowe zbiory przez wykonywanie na nich pewnych operacji. Załóżmy w tym celu, że dane są zbiory A i B. Ich *sumą*, oznaczaną przez $A \cup B$ nazywamy zbiór złożony z tych i tylko tych elementów, które należą do co najmniej jednego ze zbiorów A lub B. Podobnie definiujemy *iloczyn* zbiorów A i B jako zbiór tych i tylko tych elementów, które należą jednocześnie i do zbioru A i do zbioru B. Iloczyn, oznaczany przez $A \cap B$, bywa również nazywany *częścią wspólną* lub *przecięciem*. Jeżeli $A \cap B = \emptyset$, to mówimy, że zbiory A i B są rozłączne. *Różnicą* zbiorów A i B nazywamy zbiór $A \setminus B$ złożony z tych i tylko tych elementów, które należą do zbioru A i nie należą do zbioru B. Symbolicznie, pamiętając o *naiwności* naszego podejścia, możemy zapisać

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{x \colon x \in A \text{ lub } x \in B\}, \\ A \cap B &= \{x \colon x \in A \text{ i } x \in B\}, \\ A \setminus B &= \{x \colon x \in A \text{ i } x \notin B\}. \end{aligned}$$

Użyteczne jest również wprowadzenie *różnicy symetrycznej* zbiorów A i B, oznaczanej przez[9] $A \triangle B$, jako zbioru tych i tylko tych elementów, które należą do dokładnie jednego ze zbiorów A lub B, czyli

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Możemy też równoważnie zapisać

$$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Przykład 1.6. Niech

$$A = \{1,2,5\}, \qquad B = \{2,3,4\}.$$

Wtedy

$$A \cup B = \{1,2,3,4,5\}, \quad A \cap B = \{2\}, \quad A \setminus B = \{1,5\}, \quad A \triangle B = \{1,3,4,5\}.$$

9 Czasami również $A \div B$ lub $A \dot{-} B$.

Zwykle rozważane przez nas zbiory są podzbiorami ustalonego zbioru X, który bywa wtedy nazywany *przestrzenią* lub *uniwersum*. Jeżeli $A \subset X$, to zbiór $X \setminus A$ nazywamy *dopełnieniem* A *w* X. Czasami, jeśli z kontekstu jest jasne, w jakim uniwersum znajduje się zbiór A, to jego dopełnienie oznaczamy przez[10] A^c. Warto zauważyć, że

$$(A^c)^c = A.$$

Należy też jednak pamiętać, że dopełnienie zbioru zależy nie tylko od samego zbioru, ale również od przestrzeni, w której ten zbiór umieścimy.

Różnicę zbiorów możemy teraz przedstawić za pomocą iloczynu i dopełnienia, mianowicie

$$A \setminus B = A \cap B^c$$

dla dowolnych zbiorów A i B w ustalonym uniwersum X.

10 Można też spotkać symbole A', $\bar{A}$ lub $-A$.

1.6. Prawa rachunku zbiorów

Wymienimy teraz własności działań na zbiorach zwane również prawami rachunku zbiorów. Wprost z definicji sumy i iloczynu dla dowolnych zbiorów A i B mamy

$$A \cup B = B \cup A,$$
$$A \cap B = B \cap A.$$

Równości te nazywane są prawami *przemienności*. Z przemienności sumy zbiorów wynika natychmiast przemienność różnicy symetrycznej, to znaczy

$$A \triangle B = B \triangle A.$$

Równie oczywiste są prawa *łączności* dla sumy i iloczynu, czyli równości

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

prawdziwe dla dowolnych zbiorów A, B i C. Mówią one, że przy dodawaniu lub mnożeniu trzech zbiorów nie ma znaczenia miejsce nawiasów. Można więc tych nawiasów w ogóle nie pisać, a wynik działania $A \cup B \cup C$ lub $A \cap B \cap C$ będzie dobrze określony. Oczywiście fakt ten przenosi się w oczywisty sposób na sumę bądź iloczyn dowolnej skończonej liczby zbiorów.

Łatwo też przekonać się, jakie są związki między działaniami na zbiorach, a relacją inkluzji. Dla dowolnych zbiorów A, B i C mamy mianowicie

$$A \subset A \cup B,$$
$$A \cap B \subset A,$$
$$A \setminus B \subset A$$

oraz

$$\text{jeżeli } A \subset C \text{ i } B \subset C, \text{ to } A \cup B \subset C,$$
$$\text{jeżeli } A \subset B \text{ i } A \subset C, \text{ to } A \subset B \cap C,$$
$$\text{jeżeli } B \subset C, \text{ to } A \setminus C \subset A \setminus B.$$

Wszystkie wymienione obserwacje są w zasadzie oczywiste, ale spróbujmy uzasadnić, że zachodzi ostatnią z nich. Musimy pokazać, że dla dowolnego $x \in A \setminus C$ zachodzi $x \in A \setminus B$, przy dodatkowym założeniu, że $B \subset C$. Przypuśćmy, że $x \in A \setminus C$, czyli $x \in A$ i $x \notin C$. Ponieważ jednak $B \subset C$, to warunek $x \notin C$ implikuje $x \notin B$. Otrzymujemy więc $x \in A$ oraz $x \notin B$, skąd istotnie $x \in A \setminus B$.

Dla sumy i iloczynu zachodzą prawa *rozdzielności.*

Fakt 1.7 (Prawa rozdzielności dla sumy i iloczynu)**.** *Dla dowolnych zbiorów A, B i C zachodzą równości*

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Dowód. Uzasadnimy tylko pierwszą równość. Dowód drugiej z nich jest bardzo podobny i pozostawiamy go jako ćwiczenie.

Aby sprawdzić, że dwa zbiory są równe, musimy pokazać, że mają te same elementy. Wykażemy w tym celu dwie inkluzje,

$$A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

oraz

$$A \cap (B \cup C) \supset (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Załóżmy w tym celu najpierw, że $x \in A \cap (B \cup C)$. Z definicji iloczynu zbiorów wynika, że $x \in A$ i $x \in B \cup C$. Drugi z warunków mówi, że x jest elementem co najmniej jednego ze zbiorów B lub C. Przypuśćmy, że $x \in B$. Wtedy $x \in A$ oraz $x \in B$, więc $x \in A \cap B$. W przypadku, gdy $x \in C$, to analogicznie $x \in A \cap C$. Ponieważ jednak $A \cap B$ oraz $A \cap C$ są podzbiorami $(A \cap B) \cup (A \cap C)$, to w obu przypadkach $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$, co dowodzi pierwszej inkluzji. Z drugiej strony, jeżeli $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$, to

Załóżmy teraz, że $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Z definicji sumy $x \in A \cap B$ lub $x \in A \cap C$. W pierwszym przypadku mamy $x \in A$ i $x \in B$, więc tym bardziej $x \in B \cup C$, gdyż $B \subset B \cup C$. Pokazuje to, że $x \in A \cap (B \cup C)$. W drugim przypadku mamy $x \in A$ i $x \in C$, więc z tego samego powodu $x \in B \cup C$ i $x \in A \cap (B \cup C)$, co kończy dowód drugiej inkluzji. □

Ważne są również prawa *de Morgana*, wiążące sumę, iloczyn i różnicę zbiorów.

Fakt 1.8 (Prawa de Morgana)**.** *Dla dowolnych zbiorów A, B i C mamy*

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C),$$
$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C).$$

Dowód. Udowodnimy tym razem drugą z równości. Zaczniemy od wykazania inkluzji $A \setminus (B \cap C) \subset (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$. Załóżmy, że $x \in A \setminus (B \cap C)$. Wtedy $x \in A$ oraz $x \notin B \cap C$. Drugi z warunków mówi, że x nie należy do jednocześnie do obu zbiorów B i C, czyli nie należy do przynajmniej jednego z nich. Przypuśćmy, że $x \notin B$. Otrzymujemy $x \in A$ oraz $x \notin B$, więc $x \in A \setminus B$. Podobnie gdy $x \notin C$, dostajemy $x \in A \setminus C$. Jednak oba zbiory $A \setminus B$ oraz $A \setminus C$ są podzbiorami zbioru $(A \setminus B) \cup (A \setminus C)$, co kończy dowód pierwszej inkluzji.

Dowiedziemy teraz, że $A \setminus (B \cap C) \supset (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$. Załóżmy, że $x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$, czyli $x \in A \setminus B$ lub $x \in A \setminus C$. W pierwszym przypadku $x \in A$ i $x \notin B$, więc $x \in A \setminus (B \cap C)$, gdyż $B \cap C \subset B$. Przypadek $x \in A \setminus C$ jest w pełni analogiczny, co kończy dowód. □

Często też prawa de Morgana wypowiadane są w terminach dopełnień.

Wniosek 1.9 (Prawa de Morgana)**.** *Jeżeli A i B są podzbiorami przestrzeni X, to*

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c,$$
$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$

Dowód. Wystarczy w fakcie 1.8 przyjąć $A = X$, $B = A$ i $C = B$. □

Podobnie jak dla suma i iloczyn, różnica symetryczna zbiorów jest działaniem łącznym.

Fakt 1.10 (Łączność różnicy symetrycznej)**.** *Dla dowolnych zbiorów A, B i C mamy*

$$(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C).$$

Dowód. Załóżmy, że $x \in (A \triangle B) \triangle C$, czyli x należy do dokładnie jednego ze zbiorów $A \triangle B$ lub C. Jeżeli $x \in C$, to $x \notin A \triangle B$. Drugi warunek mówi, że x nie należy ani do A ani do B, lub też należy i do A i do B. Oznacza to, w przypadku, gdy $x \in C$, że x należy tylko do zbioru C lub do wszystkich zbiorów A, B i C. Jeżeli natomiast $x \in A \triangle B$ i $x \notin C$, to x należy do jednego ze zbiorów A lub B.

Udowodniliśmy więc, że jeśli $x \in (A \triangle B) \triangle C$, to x należy do nieparzystej liczby zbiorów spośród A, B i C. Z drugiej strony, jeżeli x należy do nieparzystej liczby zbiorów spośród A, B i C, to oczywiście $x \in (A \triangle B) \triangle C$. W konsekwencji

$$x \in (A \triangle B) \triangle C$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$x \text{ należy do nieparzystej liczby zbiorów spośród } A,\ B \text{ i } C.$$

Ostatni warunek w żaden sposób nie wyróżnia kolejności zbiorów, więc jest on równoważny temu, że $x \in (B \triangle C) \triangle A = A \triangle (B \triangle C)$. □

Wykorzystując udowodnione prawa rachunku zbiorów, możemy oczywiście wyprowadzać z nich nowe fakty.

Przykład 1.11. a) Dla dowolnych zbiorów A, B, C i D zachodzi równość

$$(A \cup B) \cap (C \cup D) = (A \cap C) \cup (A \cap D) \cup (B \cap C) \cup (B \cap D).$$

Wykorzystując wielokrotnie rozdzielność iloczynu względem sumy zbiorów, otrzymujemy

$$\begin{aligned}(A \cup B) \cap (C \cup D) &= \big[(A \cup B) \cap C\big] \cup \big[(A \cup B) \cap D\big] = \\ &= \big[(A \cap C) \cup (B \cap C)\big] \cup \big[(A \cap D) \cup (B \cap D)\big].\end{aligned}$$

Teza wynika więc z łączności i przemienności sumy zbiorów.

b) Dla dowolnych zbiorów A, B i C zachodzi

$$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C).$$

Możemy założyć, że wszystkie zbiory są podzbiorami uniwersum X, przyjmując na przykład $X = A \cup B \cup C$. Mamy wtedy

$$\begin{aligned} A \setminus (B \setminus C) &= A \setminus (B \cap C^c) = \\ &= A \cap (B \cap C^c)^c = \\ &= A \cap (B^c \cup C) = \\ &= (A \cap B) \cup (A \cap C). \end{aligned}$$

W pierwszej i drugiej równości zapisaliśmy różnicę w terminach iloczynu i dopełnienia, w trzeciej skorzystaliśmy z prawa de Morgana oraz faktu, że $(C^c)^c = C$, a w czwartej z rozdzielności iloczynu względem sumy zbiorów.

1.7. Para uporządkowana i iloczyn kartezjański

Jak wiemy, zbiór nie wyróżnia kolejności elementów, więc $\{a, b\} = \{b, a\}$. Jest jednak wiele sytuacji, kiedy taką kolejność chcielibyśmy ustalić. W szkolnej geometrii analitycznej współrzędne punktu na płaszczyźnie opisane są przez parę *uporządkowaną* liczb rzeczywistych. Pierwsza współrzędna nazywana jest *odciętą*, a druga *rzędną*. Zamiana miejscami odciętej i rzędnej najczęściej daje inny punkt niż wyjściowy.

Czym jednak taka para uporządkowana jest? Poza stwierdzeniem, że para uporządkowana, to... para uporządkowana, niewiele więcej się o tym w szkole mówi. Spróbujmy to pojęcie sformalizować, wykorzystując konstrukcję teoriomnogościową.

Dla dowolnych elementów a i b *parą uporządkowaną* nazywamy zbiór[11]

$$(a, b) \coloneqq \big\{\{a\}, \{a, b\}\big\}.$$

Element a nazywamy *pierwszym*, a b *drugim* elementem pary (a, b).

Pokażemy teraz, że para uporządkowana rzeczywiście wprowadza pewien porządek między swoimi elementami. Mianowicie sprawdzimy, że dwie pary uporządkowane są równe wtedy i tylko wtedy, gdy są utworzone z takich samych par elementów ustawionych w tej samej kolejności.

11 Jest to definicja sformułowana w 1921 r. przez polskiego matematyka Kazimierza Kuratowskiego.

Twierdzenie 1.12. *Dla dowolnych elementów a, b, c i d mamy*

$$(a, b) = (c, d)$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$a = c \qquad i \qquad b = d.$$

Dowód. Jeżeli $a = c$ i $b = d$, to oczywiście $(a, b) = (c, d)$. Załóżmy więc, że $(a, b) = (c, d)$, czyli

$$\big\{\{a\}, \{a, b\}\big\} = \big\{\{c\}, \{c, d\}\big\}.$$

Mamy wtedy (1) $\{a\} = \{c\}$ i $\{a, b\} = \{c, d\}$ lub (2) $\{a\} = \{c, d\}$ i $\{a, b\} = \{c\}$. W pierwszym przypadku z pierwszej równości otrzymujemy $a = c$ i w konsekwencji

$\{a,b\} = \{a,d\}$. Jeżeli teraz $a = b$, to $\{a\} = \{a,d\}$, co implikuje $d = a$ i $a = b = c = d$. Jeżeli natomiast $a \neq b$, to $d = b$.

W przypadku (2) z równości $\{a\} = \{c,d\}$ wynika, że $a = c = d$, co daje $\{a,b\} = a$ i ostatecznie $a = b = c = d$. $\square$

Podana definicja pary uporządkowanej jest obecnie powszechnie przyjęta, ale są też inne, nieco bardziej skomplikowane. Przedstawiamy je w zadaniu 1.15.

Naturalnie, kiedy dysponujemy już parą uporządkowaną, nic nie stoi na przeszkodzie, abyśmy wprowadzili uporządkowaną trójkę, czwórkę i ogólnie n-tkę. Przykładowo, dla elementów a, b i c możemy zdefiniować *uporządkowaną trójkę* jako

$$(a,b,c) \coloneqq \big((a,b),c\big).$$

Jak nietrudno się przekonać, zob. zadanie 1.17, taki zbiór rzeczywiście wyróżnia kolejność elementów. Postępując w ten sposób wprowadzamy iteracyjnie dla $n \geqslant 3$ *uporządkowaną n-tkę* wzorem

$$(a_1,\ldots,a_n) \coloneqq \big((a_1,\ldots,a_{n-1}),a_n\big).$$

Dla zbiorów A i B przez $A \times B$ oznaczać będziemy zbiór wszystkich par uporządkowanych postaci (a,b), gdzie $a \in A$ i $b \in B$. Zbiór ten nazywamy *iloczynem kartezjańskim* zbiorów A i B. Zauważmy, że dla dowolnych $a \in A$ i $b \in B$ para uporządkowana (a,b) składa się ze zbiorów $\{a\}$ i $\{a,b\}$, które są podzbiorami sumy $A \cup B$. W związku z tym $(a,b) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$ i w konsekwencji

$$A \times B \subset \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B)).$$

Możemy więc zapisać

$$A \times B = \{x \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))\colon x = (a,b) \text{ dla pewnych } a \in A \text{ i } b \in B\}.$$

Będziemy jednak najczęściej używali uproszczonego zapisu

$$A \times B = \{(a,b)\colon a \in A \text{ i } b \in B\}.$$

Podobnie jak w przypadku pary uporządkowanej możemy uogólnić pojęcie iloczynu kartezjańskiego na dowolną skończoną liczbę zbiorów. Dla zbiorów A_1, …, A_n niech

$$A_1 \times \ldots \times A_n \coloneqq \{(a_1,\ldots,a_n)\colon a_i \in A_i \text{ dla każdego } i = 1,\ldots,n\}.$$

Jeżeli wszystkie zbiory A_1, …, A_n są równe, powiedzmy A, to zamiast $A \times \ldots \times A$ możemy pisać A^n. W szczególności $A^2 = A \times A$.

1.8. Funkcje

Podobnie jak w przypadku pary uporządkowanej, szkolna definicja funkcji jest masłem maślanym. Zwykle podaje się ją w formie zbliżonej do

funkcja to *przyporządkowanie*, które…

A czym jest owo przyporządkowanie? To takie coś, co przyporządkowuje elementom jednego zbioru elementy drugiego zbioru. Widać, że jest tu problem, bo słowo *funkcja* zastępujemy po prostu słowem *przyporządkowanie*[12], które również nie zostało zdefiniowane. Spróbujmy temu zaradzić.

12 Czasami też *odwzorowanie* lub *przekształcenie*.

Niech X i Y będą dowolnymi zbiorami. *Funkcją* nazwiemy dowolny podzbiór f iloczynu kartezjańskiego $X \times Y$, który spełnia warunek

$$\text{dla dowolnych } x \in X \text{ i } y_1, y_2 \in Y \text{ jeżeli } (x, y_1) \in f \text{ i } (x, y_2) \in f, \text{ to } y_1 = y_2.$$

Jeżeli $(x, y) \in f$, to mówimy, że x jest *argumentem* funkcji f, a y jej *wartością* dla argumentu x. Zamiast $(x, y) \in f$ często będziemy używać standardowego zapisu $y = f(x)$. Powyższy warunek orzeka, że dla jednego argumentu funkcja ma dokładnie jedną wartość. Zbiór wszystkich argumentów funkcji f nazywamy jej *dziedziną* i oznaczamy przez D_f, a zbiór wszystkich wartości nazywamy jej *przeciwdziedziną* lub *zbiorem wartości* i oznaczamy przez R_f. Symbolicznie,[13]

13 Dziedzina funkcji bywa też oznaczana przez $\mathrm{dom}(f)$, a przeciwdziedzina przez $\mathrm{range}(f)$ lub $\mathrm{rg}(f)$.

$$D_f = \{x \in X\colon \text{istnieje } y \in Y, \text{ dla którego } (x, y) \in f\}$$

oraz

$$R_f = \{y \in Y\colon \text{istnieje } x \in X, \text{ dla którego } (x, y) \in f\}.$$

Oczywiście $D_f \subset X$ i $R_f \subset Y$, więc $D_f \times R_f \subset X \times Y$. Jeżeli $D_f = X$, to mówimy, że funkcja przekształca zbiór X w zbiór Y, co zapisujemy w postaci $f\colon X \to Y$.

Przykład 1.13. Niech f będzie podzbiorem $\mathbb{R}^2$ złożonym z par, których drugi element jest kwadratem pierwszego, to znaczy

$$f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\colon y = x^2\}.$$

Innymi słowy f to po prostu dobrze nam znana funkcja kwadratowa $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dana wzorem $f(x) = x^2$.

Podsumowanie rozdziału – co warto zapamiętać?

- Zbiór jest nieuporządkowaną kolekcją elementów.
- Zbiór jest w pełni scharakteryzowany przez swoje elementy.
- Zbiór wszystkich elementów x zbioru A spełniających warunek $\Phi(x)$ oznaczamy przez
$$\{x \in A\colon \Phi(x)\}.$$
- A zawiera się w B, co zapisujemy $A \subset B$, jeżeli dla każdego $x \in A$ zachodzi $x \in B$.
- $A = B$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A \subset B$ i $B \subset A$.
- Zbiór potęgowy $\mathcal{P}(A)$ zbioru A jest zbiorem jego wszystkich podzbiorów.

- Jeżeli $\#A = n$, to $\#\mathcal{P}(A) = 2^n$.
- Przez
$$A \cup B, \qquad A \cap B, \qquad A \setminus B, \qquad A \triangle B$$
oznaczamy odpowiednio sumę, iloczyn, różnicę i różnicę symetryczną zbiorów A i B.
- Jeżeli A jest podzbiorem uniwersum X, to A^c jest zbiorem wszystkich elementów, które nie należą do zbioru A.
- Suma, iloczyn i różnica symetryczna są działaniami przemiennymi oraz łącznymi.
- Suma jest rozdzielna względem iloczynu i odwrotnie.
- Prawa de Morgana
$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, \qquad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$
pozwalają zamienić iloczyn na sumę i odwrotnie.
- Iloczyn kartezjański $A \times B$ jest zbiorem wszystkich par uporządkowany (a, b), gdzie $a \in A$ oraz $b \in B$.
- Funkcja jest szczególnym podzbiorem iloczynu kartezjańskiego.

Zadania

Część A

1.1. Niech
$$A = \{x \in \mathbb{R}\colon (x-1)^2 \leqslant 1\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R}\colon |x-3| > 2\}, \quad C = \{-1, 0\}$$
Wyznacz $(A \cup B) \setminus C$, $(B \setminus C) \cap A$ i $A \setminus (B \setminus C)$, $(A \setminus C) \triangle B$.

1.2. Wyznacz zbiór potęgowy dla zbiorów:

a) $\{1, 2, 3, 4\}$,

b) $\emptyset$,

c) $\{\emptyset\}$,

d) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

1.3. Wyznacz iloczyn kartezjański $A \times B$ dla zbiorów:

a) $A = \{0, 1\}$, $B = \{1, 2\}$,

b) $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$,

c) $A = \emptyset$, $B = \{1, 2, 3\}$.

1.4. Wyznacz zbiory $A \times (B \times C)$, $(A \times B) \times C$, $A \times B \times C$ dla

$$A = \{0, 1\}, \qquad B = \{1, 2\}, \qquad C = \{2, 3\}.$$

1.5. Naszkicuj na płaszczyźnie zbiory $A \times B$ i $B \times A$ dla:

a) $A = \{y \in \mathbb{R}\colon\ -1 < y < 1\}$, $B = \{x \in \mathbb{R}\colon 0 < x \leq 1\}$,

b) $A = \mathbb{Z}$, $B = \langle 1, 2)$,

c) $A = \{x \in \mathbb{R}\colon x^2 + x - 2 \geq 0\}$, $B = \{b \in \mathbb{N}\colon 2^b < 11\}$.

1.6. Podaj warunek równoważny równości

$$A \times B = B \times A.$$

Część B

1.7. Udowodnij, że dla dowolnych zbiorów A, B, C i D zachodzą równości:

a) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$,

b) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$,

c) $(A \setminus B) \cup C = [(A \cup C) \setminus B] \cup (B \cap C)$,

d) $(A \setminus B) \cap (C \setminus D) = (A \cap C) \setminus (B \cup D)$.

1.8. Wykaż, że dla dowolnych zbiorów A, B, C i D zachodzą warunki:

a) jeśli ($A \subset B$ i $C \subset D$), to ($A \cup C \subset B \cup D$),

b) jeśli $A \subset B$ oraz $C \subset D$, to $A \setminus D \subset B \setminus C$.

1.9. Udowodnij, że dla dowolnych zbiorów A, B i C zachodzą równości:

a) $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$,

b) $A \setminus B = A \triangle (A \cap B)$,

c) $A \triangle B = A^c \triangle B^c$.

1.10. Wykorzystując znane prawa rachunku zbiorów, pokaż, że

$$(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C).$$

1.11. Uzasadnij, że dla dowolnych zbiorów A i B istnieje dokładnie jeden zbiór C, dla którego

$$A \triangle C = B.$$

1.12. Pokaż, że dla dowolnych zbiorów A, B i C jeżeli zbiory $A \triangle B$ i $B \triangle C$ są skończone, to skończony jest również zbiór $A \triangle C$.

1.13. Znajdź warunek równoważny równości

$$\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$$

wyrażony w terminach własności zbiorów A i B.

1.14. Uzasadnij, że dla dowolnych zbiorów A i B mamy

a) $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$,

b) $\mathcal{P}(A \cup B) = \{C \colon C = A_1 \cup B_1 \text{ dla pewnych } A_1 \in \mathcal{P}(A) \text{ i } B_1 \in \mathcal{P}(B)\}$.

1.15 (Alternatywne definicje pary uporządkowanej)**.** Dla dowolnych elementów a i b zdefiniujmy[14]

$$\langle a, b\rangle \coloneqq \big\{\{\{a\}, \emptyset\}, \{\{b\}\}\big\}$$

oraz

$$[a, b] \coloneqq \big\{\{a, \emptyset\}, \{b, \{\emptyset\}\}\big\}.$$

Udowodnij, że są to poprawne definicje pary uporządkowanej, to znaczy

$$\langle a, b\rangle = \langle c, d\rangle \qquad \text{i} \qquad [a, b] = [c, d]$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$a = c \qquad \text{i} \qquad b = d.$$

14 Pierwsza z definicji pochodzi od Norberta Wienera, druga natomiast od Feliksa Hausdorffa.

1.16. Dla dowolnych elementów a i b określmy

$$(a, b)_1 = \{\{a\}, \{b\}\} \qquad \text{oraz} \qquad (a, b)_2 = \{a, \{b\}\}.$$

Uzasadnij, podając odpowiednie przykłady, że żadna z powyższych definicji nie określa poprawnie pary uporządkowanej.

1.17 (Uporządkowana trójka)**.** Dla dowolnych elementów a, b i c określamy

$$(a, b, c) = \big((a, b), c\big).$$

Udowodnij, że

$$(a, b, c) = (d, e, f)$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$a = d, \qquad b = e, \qquad c = f.$$

1.18. *Multizbiorem* nazywamy obiekt, który podobnie jak zbiór złożony jest z dowolnych elementów, ale w którym ich krotność ma znaczenie. Multizbiory będziemy zapisywać w podwójnych nawiasach kwadratowych, na przykład $[\![a_1, \ldots, a_n]\!]$. W szczególności multizbiór $[\![1, 2, 2]\!]$ składa się z trzech elementów: jednej 1 i dwóch 2. Jest to inny obiekt niż zbiór $\{1, 2, 2\} = \{1, 2\}$. Zaproponuj definicję multizbioru w oparciu o pojęcia teorii mnogości.

1.19. Udowodnij, że dla dowolnych zbiorów A, B, C i D mamy

a) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$,

b) $(A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (A \times D) \cup (B \times C) \cup (B \times D)$,

c) $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$.

1.20. Niech $A_1, \ldots, A_n$ będą dowolnymi zbiorami. Zdefiniujmy $\mathcal{A}$ jako najmniejszy zbiór, dla którego:

a) $A_i \in \mathcal{A}$ dla dowolnego $i \in \{1, \ldots, n\}$,

b) jeżeli $X \in \mathcal{A}$ oraz $Y \in \mathcal{A}$, to ich suma $X \cup Y$ również należy do $\mathcal{A}$.

Ile maksymalnie elementów ma zbiór $\mathcal{A}$? Podaj przykład takiego zbioru.

Część C

1.21. Niech $A_1, \ldots, A_n$ będą dowolnymi zbiorami. Zdefiniujmy $\mathcal{A}$ jako najmniejszy zbiór, dla którego:

a) $A_i \in \mathcal{A}$ dla dowolnego $i \in \{1, \ldots, n\}$,

b) jeśli $X \in \mathcal{A}$ oraz $Y \in \mathcal{A}$, to ich suma $X \cup Y$ oraz różnica $X \setminus Y$ również należą do $\mathcal{A}$.

Ile maksymalnie elementów ma zbiór $\mathcal{A}$? Podaj przykład takiego zbioru.

Część D

1.22. Napisz program, który dla zadanej liczy naturalnej n wypisze wszystkie podzbiory[15] zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$.

1.23. Napisz program, który dla zadanej liczby naturalnej n oraz liczby $k \in \{1, \ldots, n\}$ wypisze wszystkie podzbiory[16] k-elementowe zbiory $\{1, \ldots, n\}$.

1.24. Napisz program, który dla zadanej liczby naturalnej n wypisze wszystkie permutacje[17] zbioru $\{1, \ldots, n\}$, to znaczy wszystkie sposoby uporządkowania elementów tego zbioru.

15 Jak wiemy z twierdzenia 1.5, będzie ich 2^n.

16 Podzbiorów tych będzie $\binom{n}{k}$.

17 Takich permutacji jest $n!$.

Literatura uzupełniająca

[1] A. Błaszczyk and S. Turek. *Teoria mnogości.* PWN, Warszawa, 2009.

[2] W. Guzicki and P. Zakrzewski. *Wykłady ze wstępu do matematyki.* PWN, Warszawa, 2012.

[3] W. Guzicki and P. Zakrzewski. *Wstęp do matematyki. Zbiór zadań.* PWN, Warszawa, 2024.

[4] W. Marek and J. Onyszkiewicz. *Elementy logiki i teorii mnogosci w zadaniach.* PWN, Warszawa, 2003.

[5] J. Musielak. *Wstęp do matematyki.* PWN, Warszawa, 1970.

[6] H. Rasiowa. *Wstęp do matematyki współczesnej.* PWN, Warszawa, 2004.

[7] I.A. Ławrow and Ł.L. Maksimowa. *Zadania z teorii mnogości, logiki matematycznej i teorii algorytmów.* PWN, Warszawa, 2004.